ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Ιδιότητες Γραφικών Παραστάσεων

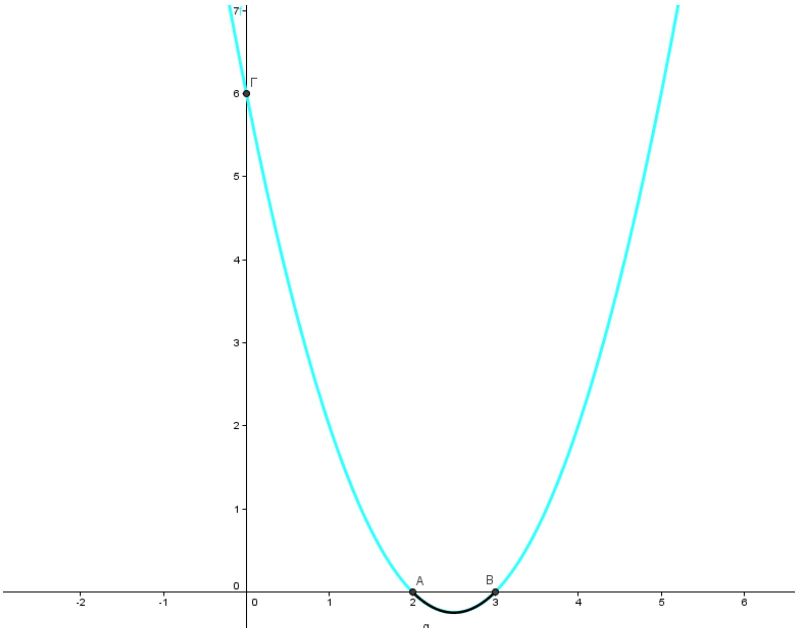
Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

i) Σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση στο Geogebra.

ii) Βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες.

iii) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x;



i) Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης πληκτρολογούμε τις εντολές
`f(x)=x^2-5*x+6`
στο πεδίο εισαγωγή.

ii) Τα σημεία τομής **με τον άξονα των *x*** υπολογίζονται αν θέσουμε στην εξίσωση $y = f(x)$, όπου y το 0.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχουμε διαδοχικά
$0 = f(x) \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 6$.
Επιλύοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $x = 2$ ή $x = 3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα Α(2,0) και Β(3,0).

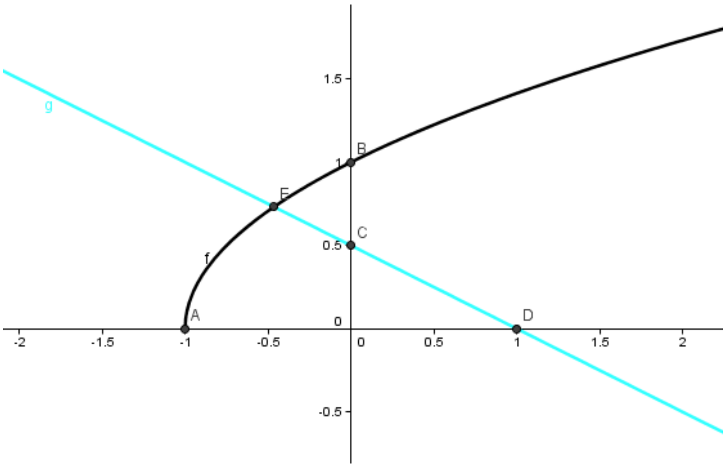
Αντίστοιχα **το σημεία τομής με τον άξονα των y** υπολογίζεται αν θέσουμε στην εξίσωση $y = f(x)$, όπου x το 0. Σε αυτή την περίπτωση εύκολα υπολογίζουμε ότι $y = f(0) \Leftrightarrow y = 6$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Γ(0,6).

iii) Πάνω από τον άξονα των x (στο σχήμα είναι το κομμάτι χρώματος ανοικτού γκρι) βρίσκονται τα σημεία για τα οποία $y > 0$. Άρα (αφού $y = f(x)$) αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > 0$, ή ισοδύναμα $x^2 - 5x + 6 > 0$. Η λύση αυτής της ανίσωσης σύμφωνα με όσα έχουμε μάθει (πίνακας προσήμων τριωνύμου) είναι $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Άσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=\dfrac{1-x}{2}$.

i) Βρείτε τα πεδία ορισμού τους.
ii) Κάντε τις γραφικές παραστάσεις στο Geogebra.
iii) Βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των *f* και *g* με τους άξονες.
iv) Βρείτε τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων.
v) Ποια σημεία της γραφικής παράστασης της *g* βρίσκονται κάτω από τη γραφική παράσταση της *f*;



i) Το πεδίο ορισμού της *f* είναι προφανώς το *R*. Για την *g* αρκεί να θεωρήσουμε το υπόριζο θετικό, δηλαδή $x+1\geq 0$. Επομένως, λύνοντας αυτή την ανίσωση παίρνουμε τη σχέση $x\geq -1$, άρα το πεδίο ορισμού της *g* είναι το $[-1,+\infty)$.

ii) Χρησιμοποιούμε τις εντολές:

```
f(x)=sqrt(x+1)
g(x)=(1-x)/2
```

Στο σχήμα η *f* φαίνεται με σκούρο χρώμα και η *g* με ανοικτό.

iii) Για να βρούμε τα σημεία τομής της *f* με τον άξονα των *x* θέτουμε στην εξίσωση $y=f(x)$, όπου *y* την τιμή 0. Έτσι παίρνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, ή ισοδύναμα $\sqrt{x+1}=0$, που βέβαια έχει λύση $x=-1$. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το Α(-1,0).

Για να βρούμε το σημείο τομής της *f* με τον άξονα των y θέτουμε στην εξίσωση $y=f(x)$, όπου *x* την τιμή 0. Έτσι παίρνουμε ότι $y=f(0)=\sqrt{0+1}=1$. Επομένως, το σημείο που ζητάμε είναι το Β(0,1).

Με όμοιο τρόπο για την g παίρνουμε διαδοχικά:

Για τον άξονα y: Θέτουμε όπου *x=0* και έχουμε $y=f(0)=\dfrac{1}{2}$. Άρα το σημείο είναι το C(0,1/2).

Για τον άξονα x: Θέτουμε όπου *y=0* και έχουμε $0=f(x)\Leftrightarrow 0=\dfrac{1-x}{2}\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$. Άρα το σημείο είναι το D(1,0).

iv) Τα κοινά σημεία *(x,y)* των δύο γραφικών παραστάσεων είναι αυτά για τα οποία ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $y=f(x)$ και $y=g(x)$, ή ισοδύναμα $f(x)=g(x)$. Επομένως αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$\sqrt{x+1}=\frac{1-x}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1-x\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x+1}\right)^2=(1-x)^2\Leftrightarrow 4(x+1)=1-2x+x^2\Leftrightarrow 4x+4=1-2x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-3=0.$$

Βεβαίως θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί. Δηλαδή πρέπει $x+1\geq 0$ και $1-x\geq 0$.
Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και λύνεται με τη γνωστή διαδικασία. Δηλαδή, υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=36+12=48$. Επομένως υπάρχουν δύο λύσεις,

οι $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$. Άρα $x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ και $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$. Παρατηρούμε όμως ότι η τιμή x_1, δεν πληροί τους περιορισμούς που θέσαμε, επομένως απορρίπτεται. Για την τιμή x_2 έχουμε ότι $f(x_2) = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ Άρα υπάρχει ένα μόνο κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων. Το $\mathrm{E}\left(3 - 2\sqrt{3},\ \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)$.

v) Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει $g(x) < f(x)$. Έτσι παίρνουμε διαδοχικά $\sqrt{x+1} > \frac{1-x}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} > 1 - x$. Η ανίσωση αυτή είναι λίγο δύσκολη. Παίρνουμε δύο περιπτώσεις.

α) Αν $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, τότε $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 > (1-x)^2 \Leftrightarrow 4x + 4 > 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 < 0$.
Αυτή η ανίσωση δευτέρου βαθμού λύνεται χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

	$-\infty$	$3-2\sqrt{3}$	$3+2\sqrt{3}$ $+\infty$
$x^2 - 6x - 3$	+	-	+

Επομένως $x \in \left(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\right)$. **Συναληθεύοντας** με την ανίσωση $x \leq 1$ (η περίπτωση που πήραμε) καταλήγουμε στη λύση $x \in \left(3 - 2\sqrt{3},\ 1\right]$.

β) Αν $1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, τότε η ανίσωση $2\sqrt{x+1} > 1 - x$, αληθεύει για κάθε x. Συναληθεύοντας με την περίπτωση $x \geq 1$, καταλήγουμε στην $x \in [1, +\infty)$.

Επομένως η λύση της αρχικής ανίσωσης $\sqrt{x+1} > \frac{1-x}{2}$ είναι: $\boxed{x \in \left(3 - 2\sqrt{3},\ +\infty\right)}$. Δείτε και το σχήμα και επαληθεύστε το αποτέλεσμα.

Δραστηριότητες για εξάσκηση

1) Λύστε την άσκηση 2 με δοσμένες συναρτήσεις τις $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και $g(x) = \frac{x+1}{2}$.

2) Λύστε την άσκηση 2 με δοσμένες συναρτήσεις τις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \sqrt{2x+5}$.