ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 02

1

i) $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x+\frac{\pi}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $2x+\frac{\pi}{2}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}$

$\rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x=2k\pi-\frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$ ή

$2x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x=2k\pi+\frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$

ii) $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow \frac{\pi}{6}-3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow -3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} \Rightarrow -3x=2k\pi+\frac{7\pi}{12}$ ή

$\frac{\pi}{6}-3x=2k\pi-\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow -3x=2k\pi-\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} \Rightarrow -3x=2k\pi-\frac{11\pi}{12}$ $\Big\}\Rightarrow$

$x=-\frac{2k\pi}{3}-\frac{7\pi}{36} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{7\pi}{36}}$, $k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{2k\pi}{3}+\frac{11\pi}{36} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{11\pi}{36}}$

Προσοχή αφού $k\in\mathbb{Z}$ (ωχαίο)
Αντικαθιστώ $\lambda=-k$, οπότε $\lambda\in\mathbb{Z}$ (ωχαίο)
και $x=\frac{2\lambda\pi}{3}-\frac{7\pi}{36}$. Αφού το λ αντιπροσωπεύει έναν ωχαίο Ακέραιο αριθμό, μπορώ να γράψω ότι δίνει το k.

(2)

i) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \\ \text{ή} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 3x \end{cases}$

$\begin{cases} 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ -x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \left(x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

ii) $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi 3x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\sigma\varphi 3x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sigma\varphi(-3x) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$

$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow -2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}$

(Προσοχή: Για να ορίζεται η $\varepsilon\varphi x$ και η $\sigma\varphi 3x$ πρέπει
$\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
και $\eta\mu 3x \neq 0 \Rightarrow \eta\mu 3x \neq \eta\mu 0 \Rightarrow$ $3x \neq 2k\pi \Rightarrow x \neq \frac{2k\pi}{3}$, $3x \neq 2k\pi + \pi \Rightarrow x \neq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$
Η λύση που βρήκατε προφανώς ικανοποιεί αυτούς τους περιορισμούς)

iii) $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\varphi 2x} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 2x}$

Αυτή τη φορά ξεκινάμε από περιορισμούς

για την $\varepsilon\varphi x$: πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

για την $\sigma\varphi 2x$: πρέπει $\eta\mu 2x \neq 0 \Rightarrow \eta\mu 2x \neq \eta\mu 0 \Rightarrow 2x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 2x \Leftrightarrow x = k\pi + 2x \Leftrightarrow -x = k\pi \Leftrightarrow x = -k\pi \Rightarrow$

$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Όμως οι λύσεις $x = k\pi$ περιέχονται στον περιορισμό $x \neq \frac{k\pi}{2}$ (για κ περιττό), επομένως απορρίπτονται.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

(3)

$$f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), \quad 0 \le x \le 2\pi$$

Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sigma\upsilon\nu\pi \longrightarrow \frac{\pi}{3} - 2x = 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow 2x = -2\kappa\pi - \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$2x = -2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\frac{\pi}{3} - 2x = 2\kappa\pi - \pi \Rightarrow 2x = -2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3}} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Βέβαια σε [illegible] μας χρειάζεται.

Πράγματι $x = \kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = (\kappa+1)\pi - \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, με $\kappa = 1$.

Άρα [illegible] $0 \le x \le 2\pi$. Σύμφωνα με

$$0 \le \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow +\frac{\pi}{3} \le \kappa\pi \le 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \kappa \le 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow \kappa \in \mathbb{Z} \quad \kappa = 1, 2$$

Άρα [illegible] για τα οποία έχουμε ότι

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (\kappa = 1)$$

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad (\kappa = 2)$$

Αντίθετα η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} - 2x = 2\kappa\pi \Rightarrow 2x = -2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}}$$

και αυτοί $0 \le x \le 2\pi$ θα ανήκουν

$0 \le k\pi + \frac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \le k\pi \le 2\pi - \frac{\pi}{6} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \le k\pi \le 2\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \le k \le 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow_{k\in\mathbb{Z}} k = 0, 1,$

Επομένως η f διαιρεί την εξίσωση για τις

για $x = \frac{\pi}{6}$ $(k=0)$

$x = \pi + \frac{\pi}{6}$ $(k=1)$

(4) Το σημείο τομής με τον $y'y$ υπολογίζεται

Θέτοντας $x = 0$

$y = f(0) = \eta\mu^2 0 + 6\sigma\upsilon\nu^2 0 - 1 = 1 - 1 = 0. \rightarrow (0,0)$

Τα σημεία τομής με τον $x'x$ υπολογίζονται θέτοντας $y = 0$

$\eta\mu^2 x + 6\sigma\upsilon\nu^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - 6\sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \eta\mu^2 2x$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\eta\mu x = \eta\mu 2x}$ (1) ή $\boxed{\eta\mu x = -\eta\mu 2x}$ (2)

(1) $\rightarrow \eta\mu x = \eta\mu(2x) \Rightarrow x = 2k\pi + 2x \Rightarrow -x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi}$,

$\hookrightarrow x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}}$

$-\pi \le 2k\pi < \pi \Leftrightarrow -1 < 2k < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \rightarrow x = 0$

$-\pi < \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{2k\pi}{3} < \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$-3\pi - \pi < 2k\pi < 3\pi - \pi \Leftrightarrow -4\pi < 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow$

$-2 < k < 1 \rightarrow k = 0, -1$

Άρα διαιρούμε τις ρίζες: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

② → $\eta\mu x = \eta\mu(-2x) \Leftrightarrow x = 2k\pi - 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3}}$

$x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \pi}$

$-\pi < \frac{2k\pi}{3} < \pi \Rightarrow -3\pi < 2k\pi < 3\pi \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \rightarrow k = -1, 0, 1$

αρα $x = -\frac{2\pi}{3}$, ή $x = 0$ ή $x = \frac{2\pi}{3}$

$-\pi < 2k\pi - \pi < \pi \Leftrightarrow 0 < 2k\pi < 2\pi \Leftrightarrow 0 < 2k < 2 \Leftrightarrow 0 < k < 1 \not\exists k$

Επομένως $x = -\frac{2\pi}{3}$, ή $x = -\frac{\pi}{3}$, ή $x = 0$, ή $x = \frac{\pi}{3}$, ή $x = \frac{2\pi}{3}$

Αρα τα σημεία τομής με τον $x'x$ είναι

$\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

⑤ i) $\sqrt{3}\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{3}\eta\mu x$

Αν $\eta\mu x = 0$ τότε $\sigma\upsilon\nu x = 1$, επομένως αυτοί τα x δεν ικανοποιούν την εξίσωση

Αρα $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$, $k \in \mathbb{Z}$

ii) $1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$ → $\Rightarrow (1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$

όμως $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$1 + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \pi/2$

ή

$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

$k \in \mathbb{Z}$

iii) $2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x = 3 \Rightarrow \eta\mu x = \frac{3(1-\sigma\upsilon\nu x)}{2}$

και $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Rightarrow \frac{9}{4}(1-\sigma\upsilon\nu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \overset{\cdot 4}{\Rightarrow}$

$9 - 18\sigma\upsilon\nu x + 9\sigma\upsilon\nu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 4 \Leftrightarrow 13\sigma\upsilon\nu^2 x - 18\sigma\upsilon\nu x + 5 = 0$

Θέτοντας $y = \sigma\upsilon\nu x$ έχω το τριώνυμο $13y^2 - 18y + 5 = 0$

το οποίο έχει λύσεις: $y = 1$ ή $y = \frac{5}{13}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi$

ή

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{5}{13} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta$, θ: $\sigma\upsilon\theta = \frac{5}{13}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

(6)

i) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$. Θέτοντας $y = \eta\mu x$ έχω

το τριώνυμο $2y^2 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ή $y = 1$

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

$\eta\mu x = 1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

ii) Ομοίως θέτω $y = \sigma\upsilon\nu x$ και βρίσκω το τριώνυμο

$2y^2 - (2+\sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0 \rightarrow y = 1$ ή $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $\boxed{\varepsilon\varphi x = \sigma\upsilon\nu x}$ Πρέπει $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Rightarrow x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow \eta\mu x = 1 - \eta\mu^2 x \Rightarrow$

$\boxed{\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0}$

Θέτω $y = \eta\mu x$ και έχω την εξίσωση

$y^2 + y - 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Άρα $\eta\mu x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < -1$ Απορρίπτεται

ή $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \eta\mu\theta \Rightarrow x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta$, για θ: $\eta\mu\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

iv) $1 + 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$1 + 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$

$1 - \eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x(1 - \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \eta\mu x)(1 + 2\sigma\upsilon\nu x) = 0$

$\Rightarrow$ $1 - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

ή

$1 + 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ ή $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$

7 εκατοντ.

i) για $t = 2004$ έχω $f(2004) = 100 + 40\eta\mu\frac{\pi}{6} = 120$ μοναδες

για $t = 2010$ έχω $f(2010) = 100 + 40\eta\mu\frac{7\pi}{6} = 80$ +1-

ii) $f(t) = 120 \Rightarrow 100 + 40\eta\mu\left(\frac{\pi(t-2003)}{6}\right) = 120 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\frac{\pi(t-2003)}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi(t-2003)}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\frac{\pi(t-2003)}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow t - 2003 = 12k + 1 \Leftrightarrow \boxed{t = 12k + 2004}$

$\frac{\pi(t-2003)}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow t - 2003 = 12k + 6 - 1 \Rightarrow$

$\boxed{t = 12k + 2008}$

$k \in \mathbb{Z}$

iii)

Μέγιστο αριθμό πωλήσεων έχουμε όταν

$$\eta\mu\left(\frac{\pi(t-2003)}{6}\right)=1 \Rightarrow \frac{\pi(t-2003)}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$t-2003=12k+3 \Rightarrow \boxed{t=2006+12k} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Ελάχιστο αριθμό πωλήσεων θα έχουμε όταν

$$\eta\mu\left(\frac{\pi(t-2003)}{6}\right)=-1 \Rightarrow \frac{\pi(t-2003)}{6}=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$t-2003=12k+9 \Leftrightarrow \boxed{t=2012+12k} \quad k\in\mathbb{Z}$$

(8)

i) $\eta\mu 15^\circ=\eta\mu(45-30)=\eta\mu 45\cdot\sigma\upsilon\nu 30-\sigma\upsilon\nu 45\,\eta\mu 30=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}=\sigma\upsilon\nu 75^\circ=\sigma\upsilon\nu(90^\circ-15)=\sigma\upsilon\nu 90\cdot\sigma\upsilon\nu 15+\eta\mu 90\cdot\eta\mu 15$

$$=0\cdot\sigma\upsilon\nu 15+1\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

iii) $\varepsilon\varphi(105^\circ)=\varepsilon\varphi(60+45)=\frac{\varepsilon\varphi 60+\varepsilon\varphi 45}{1-\varepsilon\varphi 60\cdot\varepsilon\varphi 45}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}^2}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-(2+\sqrt{3})$$

iv) $\eta\mu(195)=\eta\mu(180+15)=-\eta\mu 15=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$