

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4_A

ΜΑΘΗΜΑ: Άλγεβρα

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ασκήσεις

1) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^x$

α) ορίζεται στο R

β) είναι εκθετική συνάρτηση

γ) είναι γνησίως αύξουσα

δ) είναι γνησίως φθίνουσα;

2) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} = \frac{9}{4}$$

$$\beta) e^{2x-1} = 1$$

$$\gamma) 2^{x^2-3x} = 4^{x-2}$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x+1} + 3^x - 3^{x-1} = 128$$

$$\beta) 5^{2x-3} + 3 \cdot 5^x = 80$$

$$\gamma) 3 \cdot 2^{x-2} + 6 \cdot 5^{x-1} = 2^{x+1} + 5^x$$

$$\delta) 5 \cdot 9^x - 3 \cdot 6^x = 2 \cdot 4^x$$

4) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 2^{x^2-2x} < 8^{x-2}$$

$$\beta) \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$$

$$\gamma) 18^{8-4x} < (54\sqrt{2})^{3x-2}$$

5) Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2 \cdot 2^{2x+y} = \frac{1}{8} \cdot 4^{x-y} \\ 3^{2x+1} = 81 \cdot 3^{4y-2} \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3^{x+1} - 2^y = 8 \\ 3^{x-1} + 2^{y+1} = 3 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 36 \\ 4^x \cdot 3^y = 48 \end{cases}$$

6) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x και y που επαληθεύουν συγχρόνως τις εξισώσεις $x^y = y^x$ και $y^2 = x$

7) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \quad \beta) g(x) = 4^x + 2^{2x-1}$$

8) i. Αν $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $a^x + a^{-x} \geq 2$

ii). Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 3^{-x} = 2\sin x$

9) Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

$$\alpha) 8^{\frac{1}{3}} \quad \beta) 32^{\frac{2}{5}} \quad \gamma) 243^{\frac{3}{5}} \quad \delta) \sqrt{64^{1/3}} \quad \epsilon) 25^{0,5} - 5 \cdot 8^{\frac{2}{3}} + 64^{1,5}$$

10) Να λύσετε τις παρακάτω εκθετικές εξισώσεις:

$$\alpha) 2^{x-1} = \frac{1}{8}, \quad \beta) 3^{2^x} = 81, \quad \gamma) \left(\frac{3}{2}\right)^{7x-1} = \frac{2}{3}, \quad \delta) 4^{3x-2} = 8^{x+1}$$

$$\epsilon) (1 + \sqrt{2})^{x^3-3x+2} = 1, \quad \sigma\tau) 1000^{\frac{1}{x}} = 10 \cdot 100^x, \quad \zeta) \sqrt[3]{9} = \sqrt{3^x 3}, \quad \eta) 0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$$

11) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 2^x \geq \frac{1}{16}, \quad \beta) \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1} < \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad \gamma) 2^{2x+1} + 2 < 5 \cdot 2^x, \quad \delta) (\sqrt{2}-1)^{x^4-5x^2+1}$$

$$\epsilon) e^x + e^{-x} \geq e + \frac{1}{e}, \quad \sigma\tau) 3 \cdot \sqrt[3]{81} - 10 \cdot \sqrt[3]{9} + 3 < 0$$

12) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^x = x, \quad \beta) x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$
$$\gamma) (x^2 + 3x + 1)^{3x-2} = 1, \quad \delta) x^x - x^{-x} = 3 \left(1 + \frac{1}{x^x}\right), \quad x \text{ ακέραιος.}$$