

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η Εκθετική Συνάρτηση

Δραστηριότητα 1

Σχεδιάστε στο λογισμικό Geogebra τις συναρτήσεις και στη συνέχεια μελετήστε τις.

i) $f(x) = 2^x$ ii) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ iii) $h(x) = e^x$ iv) $u(x) = 0.2^x$

Βήμα 1

Για να σχεδιάσετε στο Geogebra τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης χρησιμοποιείτε το πεδίο εισαγωγή (στο κάτω μέρος του παραθύρου). Για την πρώτη γραφική παράσταση γράψτε τις εντολές

$f(x) = 2^x$, (στη συνέχεια πατήστε enter)

για την δεύτερη

$g(x) = (1/2)^x$

Αφού κατασκευάσετε αυτές τις δύο συναρτήσεις, ανοίξτε ένα νέο παράθυρο (Αρχείο -> Νέο Παράθυρο) και σχεδιάστε τις επόμενες δύο.

Για να ξεχωρίσουμε τις γραφικές παραστάσεις μπορούμε να τους βάλουμε διαφορετικό χρώμα. Κάντε δεξί κλικ στη γραφ. παράσταση μιας συνάρτησης και επιλέξτε την εντολή "Ιδιότητες". Από εκεί μπορείτε να αλλάξετε το χρώμα, το στυλ, και άλλα χαρακτηριστικά κάθε γραφικής παράστασης.

Βήμα 2

Μελετήστε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις αυτές και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Συνάρτηση	MONOTONIA
f	
g	
h	
u	

Βήμα 3

Απαντήστε στις ερωτήσεις:

1) Υπάρχει κάποιο κοινό σημείο από το οποίο διέρχονται και οι 4 συναρτήσεις; Αν ναι ποιο είναι αυτό;

2) Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της f και της g ; Ποια είναι αυτή;

Μπορείτε να εκμαιεύσετε έναν γενικό κανόνα για την $f(x) = a^x$;

Δραστηριότητα 2

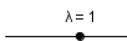
Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 0$

Βήμα 1

Για να δουλέψουμε με την παράμετρο a στο Geogebra θα χρησιμοποιήσουμε την λειτουργία του δρομέα.



Κάντε κλικ στο εικονίδιο . Στη συνέχεια κάντε κλικ σε μια ελεύθερη περιοχή στο επίπεδο του Geogebra και ονομάστε τον **δρομέα** με το **όνομα a**. Δημιουργήστε ένα δρομέα ορίζοντας ως ελάχιστη τιμή το 0, μέγιστη τιμή το 5 και αύξηση το 0.02. Η τιμή της παραμέτρου **a** θα εξαρτάται από αυτόν τον δρομέα. Καθώς θα μετακινείτε τον δρομέα δεξιά - αριστερά, θα αλλάζει και η τιμή της παραμέτρου a . Όπως βλέπετε η αρχική τιμή που δίνει το λογισμικό είναι **a=1** (στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας δρομέας με όνομα λ).



Βήμα 2

Στη συνέχεια πληκτρολογήστε στο πεδίο "Εισαγωγή" τις εντολές:

$$f(x) = a^x$$

ώστε να εμφανιστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης στην οθόνη σας. Κάντε κλικ στην



λειτουργία επιλογής (εικονίδιο) και στη συνέχεια μετακινήστε τον δρομέα δεξιά αριστερά και δείτε πως αλλάζει δυναμικά η γραφική παράσταση της συνάρτησης ανάλογα με την τιμή που έχει ο δρομέας (δηλαδή το a). Για να δείτε την κίνηση καλύτερα, κάντε δεξί κλικ στο δρομέα και επιλέξτε την εντολή "Κίνηση ενεργή". Παρατηρείστε πως αλλάζει η μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης σε σχέση με την τιμή του a .

Βήμα 3

Παρατηρείστε τη μονοτονία της συνάρτησης και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Συνθήκη	MONOTONIA
$a < 1$	
$a = 1$	
$a > 1$	

Βήμα 4

Από ποιο σημείο διέρχεται η γραφ. παράσταση της συνάρτησης για κάθε τιμή του a ;

Βήμα 5

Σταθεροποιήστε το a σε μια συγκεκριμένη θέση (π.χ. $a=2$). Ποια τιμή παίρνει η συνάρτηση για την τιμή $x=3$; Προφανώς την τιμή $y=f(2)=8$. Για να βρείτε το σημείο αυτό στη γραφική παράσταση της συνάρτησης πληκτρολογήστε στο πεδίο εισαγωγής τις εντολές

$$A = (3, f(3))$$

Υπάρχει κάποιο άλλο σημείο της γραφικής παράστασης που να έχει την ίδια τεταγμένη;

Χρησιμοποιώντας αυτή την απλή παρατήρηση μπορείτε να λύσετε την εξίσωση $2^x = 2^3$;

ΓΕΝΙΚΑ Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $a^x = a^y$ είναι η

Δραστηριότητα 3

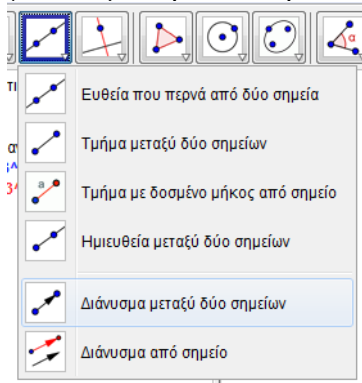
Μελέτη των συναρτήσεων $u(x) = a^x + c$, $v(x) = a^{x+c}$, $a > 0$

Βήμα 1

Δημιουργήστε δύο δρομείς (έναν για το a όπως πριν, και έναν για το c με τιμές από το -5 μέχρι το 5). Στη συνέχεια φτιάξτε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = a^x$ και $u(x) = a^x + c$ και παρατηρήστε πώς η δεύτερη αλλάζει καθώς μεταβάλλεται η τιμή του c . Την τιμή του a κρατήστε την **σταθερή** σε μια τυχαία τιμή (εκτός του 1 βέβαια).

Βήμα 2

Για να δούμε ακόμη καλύτερα τι ακριβώς συμβαίνει θα κάνουμε και μια βοηθητική κατασκευή. Σχεδιάστε τα σημεία $A(-4, f(-4))$, $B(0, f(0))$ και $C(4, f(4))$. Αυτά είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Κατασκευάστε επίσης και τα σημεία $D(-4, u(-4))$, $E(0, u(0))$ και $F(4, u(4))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης u . Για να δούμε την κίνηση μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων θα κατασκευάσουμε τα διανύσματα \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{CF} . Η κατασκευή ενός διανύσματος γίνεται με την εντολή "Διάνυσμα μεταξύ δύο σημείων" (Δείτε το σχήμα). Επιλέξτε την εντολή και μετά τα δύο σημεία που θέλετε.



Βήμα 3

Μετακινήστε τον δρομέα c ώστε να δώσετε διάφορες τιμές στην αντίστοιχη παράμετρο. Τι παρατηρείτε;

Αλλάξτε την τιμή του a , μέσω του αντίστοιχου δρομέα. Επαναλάβετε τη διαδικασία. Τι συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί για τις γραφικές παραστάσεις των f και u ;

Βήμα 4

Ακολουθήστε μια παρόμοια διαδικασία για τις $v(x) = a^{x+c}$ και $g(x) = a^x$. Αυτή τη φορά χρησιμοποιήστε τα σημεία $A(-4, g(-4))$, $B(0, g(0))$, $C(4, g(4))$ και τα σημεία $D(-4-c, v(-4-c))$, $E(0-c, v(0-c))$, $F(4-c, v(4-c))$.

Καταγράψτε τα συμπεράσματά σας στον παρακάτω πίνακα

Συνάρτηση	Μετακίνηση σε σχέση με την $f(x) = a^x$
$2^x + c$, $c > 0$	
$2^x - c$, $c > 0$	
2^{x+c} , $c > 0$	
2^{x-c} , $c > 0$	