

**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΥΛΗ: Πράξεις με διανύσματα**

1). Έστω το διάνυσμα  $\vec{AB} \neq \vec{0}$  και δύο σημεία  $O_1, O_2$  του χώρου. Αν  $A_1, A_2$  και  $B_1, B_2$  είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των  $A$  και  $B$  ως προς τα  $O_1, O_2$ , να αποδειχθεί ότι:

i).  $\vec{A_1B_1} = \vec{A_2B_2}$

ii).  $\vec{A_1A_2} = \vec{B_1B_2}$

2). Αν είναι  $\vec{OA} = \vec{O'A'}$  και  $\vec{OB} = \vec{O'B'}$ , να δείξετε ότι:

i).  $\vec{AA'} = \vec{BB'}$

ii).  $\vec{AB} = \vec{A'B'}$

3). i). Αν  $O$  είναι κέντρο παραλληλόγραμμου  $AB\Gamma\Delta$  και  $M$  τυχαίο σημείο του χώρου, να αποδείξετε ότι:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} = 4\vec{MO}$

ii). Να βρείτε σημείο  $K$  του επιπέδου παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  για το οποίο είναι:

$$\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{K\Gamma} + \vec{K\Delta} = \vec{0}$$

4). Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  και  $O$  τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  που ορίζονται από τις ισότητες:

$$\vec{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \quad \vec{OB} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \quad \vec{O\Gamma} = 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta}$$

είναι συνευθειακά.

5). Έστω  $O, A, B, \Gamma$  σημεία του χώρου. Αν υπάρχουν  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  με

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \text{και} \quad \lambda_1 \cdot \vec{OA} + \lambda_2 \cdot \vec{OB} + \lambda_3 \cdot \vec{O\Gamma} = \vec{0},$$

να αποδείξετε ότι τα  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά σημεία.

6). Αν για τα σημεία  $O, A, B, \Gamma$  ισχύει  $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = 7\vec{O\Gamma}$ , να δείξετε τα  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά και το  $\Gamma$  βρίσκεται μεταξύ των  $A$  και  $B$ . Να βρείτε επίσης τον αριθμό  $\lambda$  ώστε να ισχύει:  $\vec{A\Gamma} - \lambda\vec{B\Gamma} = \vec{0}$ .

7). Έστω  $O$  τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι  $\vec{O\Gamma} = \lambda\vec{OA} + (1 - \lambda)\vec{OB}$ .

8). Έστω  $G$  και  $G'$  τα βαρύκεντρα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{\Gamma\Gamma'} = 3\vec{GG'}$$

9) Δύο κάθετες χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  ενός κύκλου με κέντρο  $O$  τέμνονται στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{O\Delta} = 2\vec{OM}$$

10) Έστω  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δύο μη μηδενικά διανύσματα και μη παράλληλα.

i) Αν ισχύει ότι  $\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = \vec{0}$  (όπου  $\kappa, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί), να αποδείξετε ότι  $\kappa = \lambda = 0$ .

ii) Αν  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$  και  $\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} = \mu \vec{\alpha} + \nu \vec{\beta}$ , να αποδείξετε ότι  $\kappa = \mu$  και  $\lambda = \nu$ .

11) Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε το ίδιο και για τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ .

12) Αν  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ , να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} - (\lambda + 1)\vec{\beta}$  να είναι παράλληλα.

13) Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  που δεν είναι παράλληλα ανά δύο. Αν  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma} + \vec{\alpha}$ , να αποδείξετε ότι  $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

14) Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το σημείο  $\Delta$  της  $B\Gamma$  με  $\overrightarrow{B\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ . Αν  $E$  είναι το μέσο της  $A\Delta$  και  $M$  το σημείο τομής της  $BE$  με την  $A\Gamma$ , να εκφράσετε το  $\overrightarrow{AM}$  ως συνάρτηση του  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

15) Αν  $\Delta$  είναι τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\kappa$  τέτοιος ώστε:  
 $\overrightarrow{A\Delta} = \kappa \overrightarrow{AB} + (1 - \kappa)\overrightarrow{A\Gamma}$ .

16) Έστω τρία συνευθειακά σημεία  $A, B, \Gamma$  και οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$ . Σε κάθε σημείο  $M$  του χώρου αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα:  
 $f(M) = \alpha \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} + \gamma \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$

17) Έστω τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta})$ .

18) Τα σημεία  $M$  και  $N$  διαιρούν το τμήμα  $AB$  σε τρία ίσα μέρη. Για οποιοδήποτε σημείο  $O$  του χώρου, να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$  και  $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$ .

19) Αν για τα σημεία  $O, A, B, \Gamma$  ισχύει ότι  $2\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$ , είναι συνευθειακά και να βρείτε τους αριθμούς  $\lambda$  και  $\mu$  ώστε να ισχύει  $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{A\Gamma}$ , και  $\overrightarrow{BA} = \mu \overrightarrow{A\Gamma}$ .

20) Αν τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά και  $O$  είναι ένα σημείο του χώρου, να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  με  $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| \neq 0$ , τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \text{ και } \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB} + \lambda_3 \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}.$$

21) Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  παίρνουμε το σημείο  $E$  της  $A\Gamma$  με  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$  και το σημείο  $\Delta$  της διαμέσου  $AM$  με  $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $B, \Delta, E$  είναι συνευθειακά.

22) Αν σε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι  $\vec{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{AG} = \vec{\beta}$ , να υπολογίσετε τα διανύσματα  $\vec{BG}, \vec{\Gamma\Delta}, \vec{\Delta\epsilon}, \vec{\epsilon Z}, \vec{ZA}$ .

23) Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα.

24) Αν τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  να είναι παράλληλα.

\*\*\*\*\*

25) Για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , να δείξετε ότι  $\left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right| \leq |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ .

26) Να εξετάσετε πότε ισχύουν οι ισότητες:

i)  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ ,

ii)  $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \left| |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \right|$ .

\*\*\*\*\*