ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Έλλειψη

Δραστηριότητα 1
Κατασκευή Έλλειψης

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δίνονται δύο σημεία E_1 και E_2. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E_1 και E_2 είναι σταθερό (και μεγαλύτερο του E_1E_2), ονομάζεται **έλλειψη**. Τα σημεία E_1 και E_2 τα ονομάζουμε **εστίες** της έλλειψης.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ
Θα δούμε βήμα - βήμα πως γίνεται η κατασκευή μιας έλλειψης με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra.

Βήμα 1
Καταρχάς ορίζουμε τις εστίες της έλλειψης με συντεταγμένες **E_1(-γ,0) και E_2(γ,0),** ώστε να απλοποιήσουμε τις πράξεις. Η απόσταση των δύο εστιών είναι ίση με .... Αυτή η απόσταση ονομάζεται **εστιακή απόσταση**.
α) Δημιουργήστε έναν **δρομέα** στο Geogebra με το όνομα γ και επιλέξτε να κινείται μεταξύ των τιμών 0 και 5. Ως αρχική τιμή δώστε το 1.
β) Ορίστε τα δύο αυτά σημεία στο επίπεδο του Geogebra. (Εντολή: `E_1=(-γ,0))`

Βήμα 2
Ορίζουμε ως **2α** την σταθερή απόσταση κάθε σημείου από τις εστίες της έλλειψης. Το α θα πρέπει να είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το γ για να ορίζεται η έλλειψη; ....

Δημιουργήστε έναν **δρομέα** με το όνομα α. Επιλέξτε να κινείται μεταξύ του 0 και του 10. Δώστε του ως αρχική τιμή την τιμή 2.

Βήμα 3
Κατασκευάστε έναν ακόμη **δρομέα** με το όνομα t. Δώστε του τιμές από το 0 μέχρι το 1, με βήμα 0.001, και ως αρχική τιμή την τιμή 0.7.

Βήμα 4
Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο την εστία E_1 και ακτίνα ίση με **t*2*α**. Για να το κάνετε αυτό χρησιμοποιήστε την εντολή "**Κύκλος με κέντρο και ακτίνα**" που βρίσκεται στο μενού των εντολών του κύκλου. Στη συνέχεια μέσω των επιλογών ορίστε την περίμετρο του κύκλου να είναι **διακεκομμένη πράσινη** γραμμή.

Βήμα 5
Τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του πράσινου κύκλου απέχουν από την εστία E_1 απόσταση ίση με ....
Εμείς θέλουμε να βρούμε ένα σημείο αυτού του κύκλου που να έχει την ιδιότητα της έλλειψης. Δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων από τις εστίες να είναι ίσο με **2α**. Αν λοιπόν ένα σημείο απέχει από την εστία E_1 απόσταση ίση με $t \cdot 2a$, τότε θα απέχει από την E_2 απόσταση ίση με .... (ώστε το άθροισμα να δίνει 2α).
Κατασκευάστε ένα κύκλο με κέντρο την εστία E_2 και ακτίνα ίση με αυτό που βρήκατε παραπάνω. Ορίστε **διακεκομμένη μπλε γραμμή** στην περίμετρό του.

Βήμα 6
Βρείτε τα **σημεία τομής** των δύο κύκλων. Ονομάστε τα Μ και Ν και δώστε τους κόκκινο χρώμα.

Βήμα 7
Υπολογίστε τις **αποστάσεις** E_1M και E_2M. Για να το κάνετε αυτό χρησιμοποιήστε την εντολή "Απόσταση ή μήκος" από το μενού της γωνίας (4ο κουμπί από δεξιά). Υπολογίστε το άθροισμα των αποστάσεων του M από τις δύο εστίες. Για να το κάνετε αυτό γράψτε την εντολή

```
D = Απόσταση[E_1, M] + Απόσταση[E_2, M]
```

στο πεδίο Εισαγωγή.
Με τι ισούται η μεταβλητή D που υπολογίσατε; ....
Αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου t (με τον δρομέα), αλλάζει το άθροισμα των αποστάσεων του M από τις δύο εστίες; ....

Ας αποδείξουμε αναλυτικά αυτό που είδαμε στο Geogebra.
Τα σημεία τομής των δύο κύκλων (M και N) θα απέχουν
από την εστία E_1 απόσταση ....
από την εστία E_2 απόσταση ....
Άρα το άθροισμα των αποστάσεών τους από τις δύο εστίες θα είναι: ....
Αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου t, αλλάζει το άθροισμα των αποστάσεων του M από τις δύο εστίες; ....

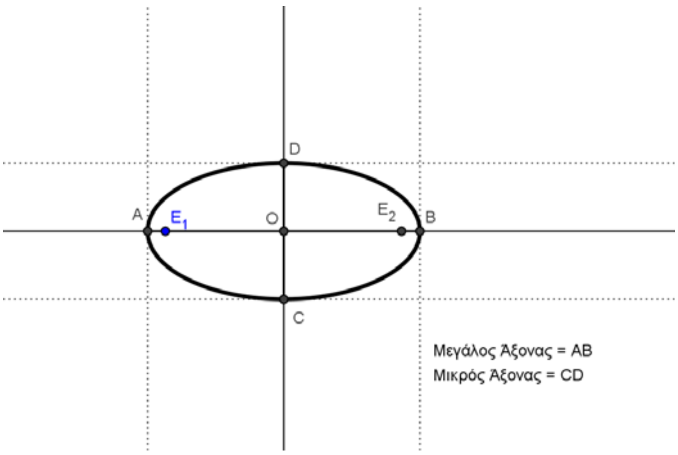
ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ.

Βήμα 8
Μετακινώντας τον δρομέα t μπορούμε να δούμε όλα τα σημεία της έλλειψης. Για να φανεί το σχήμα της έλλειψης στην οθόνη, αρκεί να επιλέξετε το **"ίχνος ενεργό"** στις επιλογές των σημείων M και N. Αφού το κάνετε αυτό, μετακινήστε τον δρομέα t και δείτε το σχήμα της έλλειψης στην οθόνη σας.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της έλλειψης που σχεδιάσατε είναι η εξής

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1},$$

όπου $b^2=a^2-\gamma^2$.



Ερωτήσεις
1) Ποια είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τους άξονες; (Βρείτε τις συντεταγμένες τους)

2) Ποιο είναι το μήκος του μικρού της άξονα και ποιο το μήκος του μεγάλου της άξονα;

3) Τι σχήμα προκύπτει αν $a=b$; Πού είναι τότε οι δύο εστίες της έλλειψης;

4) Αν το σημείο K(x,y) είναι σημείο της έλλειψης, συμπληρώστε τις ανισώσεις
$.........\le x \le ....$
και
$.........\le y \le ....$