

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 01-Γ

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής

ΤΑΞΗ: Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ: Παράγωγος συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $f(x) = ae^{-x} + \beta e^{-2x}$ (α, β σταθεροί αριθμοί), να αποδείξετε ότι $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$, αποδείξετε ότι $x^3 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων:

i) $y = \ln(3x^2 - 1)$ ii) $y = e^{\sqrt{x}}$ iii) $y = \eta\mu^3 2x$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 5x - 1$ στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ για τους οποίους το διάγραμμα της συνάρτησης $y = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 3)$, διέρχεται από το σημείο $B(-1, 8)$ και η εφαπτομένη του στο B έχει κλίση -6 . Μετά να γίνει το διάγραμμα της συνάρτησης αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\eta\mu\chi) = \eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$ για την οποία υπάρχει η $f''(x)$. Να αποδείξετε ότι: $3f''\left(\frac{1}{2}\right) - 2f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x - y - 2 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C της f με $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ που είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = 2x + 5$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f με $f(x) = x^2 + ax + \beta$ στο σημείο $x_0 = -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με $f(x) = x^2 + ax + 1$ και g με $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να βρεθεί ο α ώστε η ευθεία $y = 9x - 14$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f με $f(x) = x^3 - 3\alpha x + 2$. Η εφαπτομένη έχει άλλο κοινό σημείο με τη C ;

ΑΣΚΗΣΗ 12

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) και C η γραφική παράσταση. Να δείξετε ότι:

- i) Από κάθε σημείο του άξονα $x'x$ διέρχεται μόνο μια εφαπτομένη της C .
- ii) Η εφαπτομένη αυτή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με σταθερό εμβαδό.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$ που περνούν από το σημείο $M(1, -2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Μια μελέτη που έγινε για τον πληθυσμό μιας πόλης, προβλέπει ότι ύστερα από t χρόνια η πόλη θα έχει πληθυσμό $P(t) = 25 \cdot e^{0,02t}$ χιλιάδες. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής (αύξησης) του πληθυσμού αυτής της πόλης ύστερα από 50 χρόνια.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R = 9 - 4t$, όπου t ο χρόνος σε sec και $0 \leq t \leq \frac{9}{4}$. Να βρείτε το ρυθμό μείωσης του όγκου και της επιφάνειας της μπάλας όταν $t = 1$ sec.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Φουσκώνοντας ένα σφαιρικό μπαλόνι, ο όγκος του αυξάνεται με ρυθμό $100\pi \text{ cm}^3 / \text{sec}$.

i) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα του μπαλονιού είναι 6 cm, να βρείτε το ρυθμό αύξησης της ακτίνας και της επιφάνειας του μπαλονιού.

ii) Να βρείτε την ακτίνα του μπαλονιού τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιφάνεια του αυξάνεται με ρυθμό $20\pi \text{ cm}^2 / \text{sec}$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2 cm/sec και 4 cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x = 25 \text{ cm}$ και $y = 32 \text{ cm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Από ένα σφαιρικό μπαλόνι διαφεύγει αέριο με ρυθμό $3 \text{ cm}^3 / \text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μείωσης της επιφάνειας του μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 20cm.