

Φύλλο Εργασίας

Μάθημα: ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Δραστηριότητα 1

Να γίνει πλήρης μελέτη της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Βήμα 1

Βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού**. Επιπλέον, εξετάζουμε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κάποια **συμμετρία** (δηλαδή αν είναι άρτια ή περιττή).

Βήμα 2

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο και τη **μονοτονία** της συνάρτησης. Εντοπίζουμε τα τοπικά ακρότατα.

Βήμα 3

Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο και την **κυρτότητα** της συνάρτησης. Εντοπίζουμε τα σημεία καμψής. (Η κυρτότητα της συνάρτησης δίνεται από την δεύτερη παράγωγο. Αν η $f''(x)$ είναι θετική τότε η συνάρτηση λέγεται κυρτή, αν είναι αρνητική λέγεται κοίλη. Σημεία καμψής είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης)

Βήμα 4

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **κατακόρυφες ασύμπτωτες**. Αυτό συμβαίνει όταν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ισούται με το $+\infty$ ή το $-\infty$. αν κάτι τέτοιο συμβαίνει, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. **Προσοχή:** Εξετάζουμε μόνο τα μεμονωμένα σημεία x_0 στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται.

Βήμα 5

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **οριζόντιες ασύμπτωτες**. Αυτό συμβαίνει όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$ ή όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι η ευθεία $y = y_0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.

Βήμα 6

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση έχει **πλάγιες ασύμπτωτες**. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $+\infty$. (Για το $-\infty$ δουλεύουμε αντίστοιχα)

Βήμα 7.

Χάραξη της γραφικής παράστασης.

Συνδυάζουμε την πληροφορία για την κυρτότητα και τη μονοτονία σε ένα μόνο πίνακα. Συνδυάζουμε την προηγούμενη πληροφορία (όλων των βημάτων) και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.

