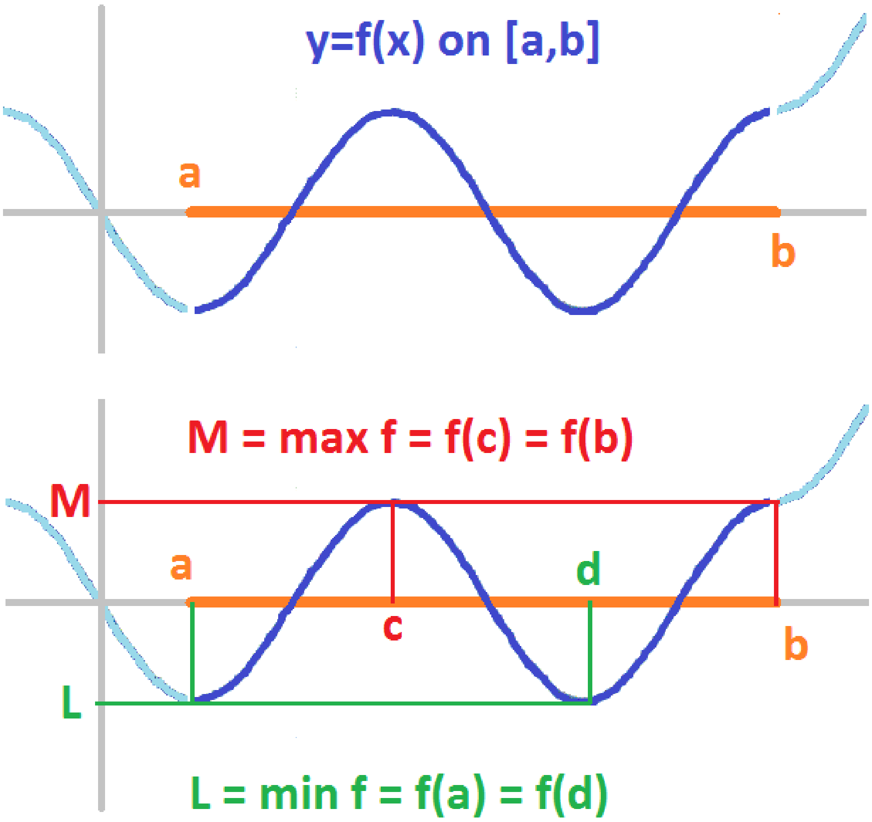
# IV. Συνέχεια Συνάρτησης



# ΜΕΡΟΣ 1
# Συνέχεια Συνάρτησης

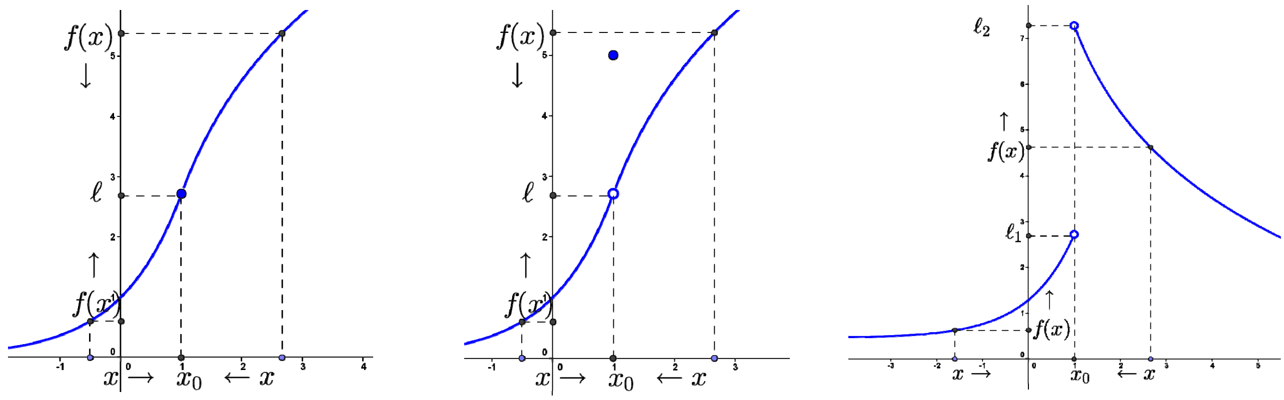
## Α. Ορισμός

**Συνέχεια σε σημείο**: Θα λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in D_f$, όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Συνεχής Συνάρτηση**: Μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της $D_f$ ονομάζεται συνεχής.

Παραδείγματα
- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής.
- Οι συναρτήσεις $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \log_a x, a^x$ είναι συνεχείς.




(α) (β) (γ)

**Σχήμα 1**. Οι συναρτήσεις των σχημάτων (β) και (γ) δεν είναι συνεχείς στο $x_0$, σε αντίθεση με τη συνάρτηση του (α), η οποία είναι συνεχής.

**Θεώρημα 1**
Αν οι συναρτήσεις $f, g$ είναι συνεχείς στο $x_0$, τότε είναι συνεχείς στο $x_0$ και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ |f|,\ \sqrt[\nu]{f},$$

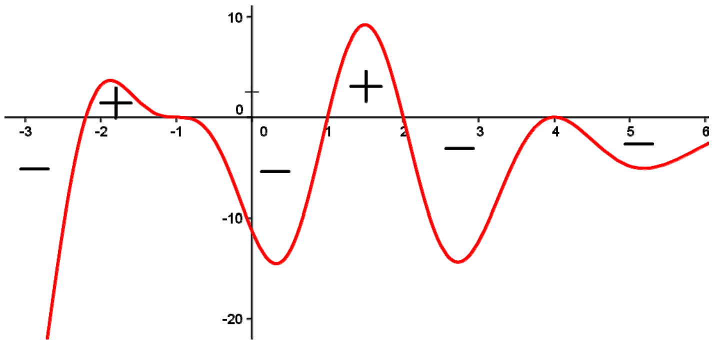
με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το $x_0$.

**Θεώρημα 2**
Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_0$ και η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0$.

**Θεώρημα 3 (Bolzano)**
Δίνεται μια συνάρτηση $f$, ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α,β]. Υποθέτουμε ότι η $f$ πληροί τα παρακάτω κριτήρια:
- Η $f$ είναι συνεχής στο [α,β]
- Ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

**Σχόλια**
- Αν μια συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο διάστημα Δ (δηλαδή είτε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$, είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$).
- Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της (σχήμα 2).




**Σχήμα 2**. Μια συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών της.

Με βάση τα παραπάνω σχόλια, αν θέλουμε να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.
1. Βρίσκουμε τις ρίζες της $f$.
2. Σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε (τυχαία) έναν αριθμό (έστω $x_k$) και βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης στον αριθμό αυτό (δηλαδή το πρόσημο του αριθμού $f(x_k)$). Το πρόσημο αυτό είναι το πρόσημο της συνάρτησης σε όλο το αντίστοιχο διάστημα.

**Θεώρημα 4 (Ενδιάμεσων τιμών)**
Δίνεται μια συνάρτηση $f$, ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α, β]. Υποθέτουμε ότι η $f$ πληροί τα παρακάτω κριτήρια:
- Η $f$ είναι συνεχής στο [α, β].
- Ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Τότε για κάθε αριθμό $c$ μεταξύ των αριθμών $f(\alpha)$, $f(\beta)$, υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = c$.

Σχόλια
- Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.
- Η εικόνα. $f(\Delta)$, ενός διαστήματος Δ, μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, $f$, είναι διάστημα.

**Θεώρημα 5 (Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής)**
Αν η $f$ είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η $f$ παίρνει στο [α, β] μια **μέγιστη τιμή M** και μια **ελάχιστη τιμή m**.

Σχόλια

- Το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής αναφέρει ότι υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$, τέτοιοι ώστε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, ώστε να ισχύει $m < f(x) < M$ , για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης, $f$ , με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M] = f([\alpha, \beta])$.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $\mathrm{A} = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.
- Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το (Β, Α).

# Δ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

## 1. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να ελέγξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης ή να υπολογίσουμε κάποιες παραμέτρους ώστε να είναι συνεχής.

Σε τέτοιες ασκήσεις χρησιμοποιούμε τον ορισμό. Πρέπει δηλαδή να έχουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αν η συνάρτηση έχει έναν απλό τύπο τότε χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1. Αν η δοσμένη συνάρτηση είναι δίκλαδη, τότε βρίσκουμε τα πλευρικά όρια και θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Παραδείγματα: Ασκήσεις 2Α, 3Α, 4Α, 5Α, 1Β, 2Β σχολικού βιβλίου σελ. 197-201.

## 2. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση σε ένα ανοικτό διάστημα.

Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης αριστερά και ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η εξίσωση

$$\eta\mu x = x + 1,$$

Τότε μεταφέροντας όλους τους όρους αριστερά παίρνουμε την εξίσωση $\eta\mu x - x - 1 = 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \eta\mu x - x - 1$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα, άρα η εξίσωση θα έχει μια τουλάχιστον λύση.

Ειδικές Περιπτώσεις

- Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει μια σχέση (π.χ. $f(\xi) = g(\xi) - 1$), τότε αντικαθιστούμε το $\xi$ με $x$, φέρνουμε όλους τους όρους αριστερά και ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το θ. Bolzano θα πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.
- Σε περίπτωση που η δοσμένη εξίσωση έχει **παρονομαστές** με ρίζες είτε το α είτε το β, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που αναφέρεται παραπάνω.
- Αν **δεν μας δίνεται διάστημα**, αλλά μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει απλά μια λύση, τότε δοκιμάζουμε κάποιους αριθμούς μέχρι να βρούμε αποτελέσματα που ικανοποιούν το θ. Bolzano. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να δουλέψουμε παίρνοντας τα όρια στο $+\infty$ και στο $-\infty$ (ή στο δεξιό και το αριστερό όριο του πεδίου ορισμού). Αν αυτά τα όρια είναι ετερόσημα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $x_1$, $x_2$ που ικανοποιούν τα κριτήρια του θ. Bolzano.

Για να αποδείξουμε ότι αυτή η ρίζα είναι μοναδική, αρκεί να ξέρουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 (ή γνησίως μονότονη) στο διάστημα αυτό.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 6Α, 7Α, 8Α, 4Β, σχολικού βιβλίου σελ. 197-201.

## 3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο $x_0$, αν γνωρίζουμε κάποια σχέση που η συνάρτηση ικανοποιεί.

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνέχειας, δηλαδή τη σχέση $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, και προσπαθούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο όριο, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, χρησιμοποιώντας τη δοσμένη σχέση. Αν η σχέση που μας δίνεται είναι ανίσωση, τότε πιθανώς το κριτήριο παρεμβολής να φανεί χρήσιμο.
Παραδείγματα: Άσκηση 3Β, 7Β, σχολικού βιβλίου σελ. 197-201.

## 4. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε το πρόσημο μιας συνάρτησης.

Σε αυτή την περίπτωση ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

1. Βρίσκουμε τις ρίζες της $f$.
2. Σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε (τυχαία) έναν αριθμό (έστω $x_k$) και βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης στον αριθμό αυτό (δηλαδή το πρόσημο του αριθμού $f(x_k)$). Το πρόσημο αυτό είναι το πρόσημο της συνάρτησης σε όλο το αντίστοιχο διάστημα.

Παραδείγματα: Άσκηση 9Α, σχολικού βιβλίου σελ. 197-201.

## 5. Ασκήσεις Βελτιστοποίησης

Αυτές είναι ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής.

Παραδείγματα: Άσκηση 9Β, σχολικού βιβλίου σελ 197-201.

## 6. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε το Σύνολο Τιμών μιας συνάρτησης

Θα δούμε στα παρακάτω κεφάλαια πως αντιμετωπίζονται τέτοιες ασκήσεις. Για την ώρα μπορούμε να εξετάσουμε μόνο περιπτώσεις όπου οι συναρτήσεις έχουν σταθερή μονοτονία. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής. Συγκεκριμένα,

- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα και συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου $\mathrm{A} = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως αύξουσα και συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το [Α, Β], όπου $\mathrm{A} = f(\alpha)$ και $\mathrm{B} = f(\beta)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα και συνεχής** σε ένα **ανοικτό** διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Β, Α), όπου $\mathrm{A} = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως φθίνουσα και συνεχής** σε ένα **κλειστό** διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το [Β, Α], όπου $\mathrm{A} = f(\alpha)$ και $\mathrm{B} = f(\beta)$.

Παραδείγματα: Άσκηση 10Α, σχολικού βιβλίου σελ. 197-201.

## Ασκήσεις

**1.** Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια τους:

Α) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x>1\\ x^2-2 & x\le 1\end{cases}$ Β) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 2\\ x^2-1 & x>2\end{cases}$

**2.** Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχειά τους:

Α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & \mathrm{x}>0\\ 1 & \mathrm{x}=0\\ \dfrac{x^2+\eta\mu x}{x} & \mathrm{x}<0\end{cases}$ Β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2\pi\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} & \mathrm{x}<1\\ -\pi & \mathrm{x}=1\\ \dfrac{\eta\mu(\pi\cdot x)}{x-1} & \mathrm{x}>1\end{cases}$

Γ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|+|x+a|}{x} & x\ne 0\\ 2a & x=0\end{cases}$, όπου $a>0$.

**3.** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

Α) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ Β) $g(x)=\ln\left(\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)$ Γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(x)-1+\ln^2 x}}{\left|e^x-4\right|}$

**4.** Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχειά τους:

Α) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \mathrm{x}<0\\ x-1 & 0\le \mathrm{x}\le 2\\ 2-x & \mathrm{x}>2\end{cases}$ Β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x|x+1|}{x+1} & x\ne -1\\ -1 & x=-1\end{cases}$ Γ) $f(x)=\begin{cases}x^2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

**5.** Να μελετήσετε την παρακάτω συνάρτηση ως προς τη συνέχεια:
$f(x)=\max\{x^2-4x-5, x+1\}$, όπου $D_f=R$.

**6.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax+1 & \mathrm{x}<\text{-}1\\ (2-b)x+a & \text{-}1\le \mathrm{x}\le 1\\ a-bx^2 & \mathrm{x}>1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές $a,b$, έτσι ώστε η $f$ να είναι συνεχής.

**7.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\eta\mu 2x+a^2}{x} & x\ne 0\\ 3 & x=0\end{cases}$$

Να προσδιορίσετε την τιμή του $a$ έτσι ώστε η $f$ να είναι συνεχής.

**8.** Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-a}{x^2-4} & x>2\\ \dfrac{1}{4x\sqrt{3}} & x\le 2\end{cases}$$

**9.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+2bx-6}{x-2} & x>2\\ ax+3b & x\le 2\end{cases}.$$

Για ποιές τιμές των $a,b$ είναι η $f$ συνεχής;

**10.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2} & x<0\\ \dfrac{\text{ημ}\left(a^2x\right)}{\text{ημ}x} & 0<x<\pi\end{cases}.$$

Για ποιά τιμή του $a\neq 0$, η $f$ είναι συνεχής στο σημείο 0;

**11.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2\text{ημ}\dfrac{1}{x} & x<a\\ x^3+x & x\ge a\end{cases}.$$

Για ποιά τιμή του πραγματικού αριθμού α, η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=a$;

**12.** Έστω συνάρτηση $f$ ορισμένη στο διάστημα Δ=(-1,1), η οποία για κάθε $x\in\Delta-\{0\}$ ικανοποιεί τη σχέση $x-\text{ημ}^2x\le xf(x)\le x+\text{ημ}^2x$. Αν ισχύει ότι $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο 0.

**13.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο σημείο 1 και ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+\text{συν}\dfrac{\pi x}{2}}{(x-1)^2}=1,$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(1)$.

**14.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g$ ορισμένες στο R και $x_0\in R$. Για τις συναρτήσεις υποθέτουμε ότι

1) Η $f$ είναι φραγμένη στο $(x_0-a,x_0+a)$, για κάποιο $a>0$.

2) Η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x_0$.

3) Η $g$ είναι συνεχής στο $x_0$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $fg$ είναι συνεχής στο $x_0$ αν και μόνο αν $g\left(x_0\right)=0$.

**15.** Δίνεται η αύξουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to R$. Αν για κάθε $x_1,x_2,x_3\in R$ με $0\le x_1\le x_2\le x_3\le 1$ ισχύει

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\ge\frac{f(x_2)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1},$$

να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x_0\in[0,1)$.

**16.** Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία υποθέτουμε ότι

$$\left|f(x)-f(y)\right|<|(x-y)g(x)|$$

για κάθε $x,y\in R$, όπου $g$ μια τυχαία συνάρτηση. Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $R$.

**17.** Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία υποθέτουμε ότι

1) $f(x+y)=f(x)f(y)$, για κάθε $x,y\in R$

2) $f(x)\neq 0$, $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι

Α) $f(0)=1$

Β) Αν η $f$ είναι συνεχής στο 0 τότε είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R$.

**18.** Δίνεται συνάρτηση $f: R^* \to R$ για την οποία υποθέτουμε ότι

1) $f(xy)=f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in R^*$

2) $f(x) \neq 0$, $x \in R^*$.

Να αποδείξετε ότι

Α) Αν η $f$ είναι συνεχής στο σημείο 1, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R^*$.

Β) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $\xi \in R^*$ τότε είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R^*$.

**19.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-2x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2, 0).

**20.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα για κάθε τιμή των παραμέτρων $a,b,c \in R$.

**21.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$\dfrac{x^{2012}+1}{x-1}+\dfrac{x^{2013}+2}{x-2}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

**22.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\text{ημ}x-\text{ημ}a=\frac{\pi}{2}-x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**23.** Για τις συναρτήσεις $f,g$ υποθέτουμε ότι

1) είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$,

2) $f(b)=g(a)$ και $f(a)=g(b)\neq g(a)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

**24.** Αν $a,b,c \in R$ με $a \neq 0$ και $c^2+bc+ac<0$, να αποδείξετε ότι $b^2>4ac$.

**25.** Για τις συναρτήσεις $f,g$ υποθέτουμε ότι

1) είναι συνεχείς στο $R$.

2) $f(x) \leq 0 \leq g(x)$, για κάθε $x \in R$.

3) υπάρχουν $a,b \in R$, τέτοιοι ώστε $f(a)=a$, $g(b)=b$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in R$ τέτοιο ώστε $f(\rho)+g(\rho)=\rho$.

**26.** Για τις συναρτήσεις $f,g$, υποθέτουμε ότι

1) είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$

2) $a \leq g(x) \leq b$ για κάθε $x \in [a,b]$

3) $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(g(\rho))=\rho$.

**27.** Έστω $f, g$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$ με σύνολο τιμών το διάστημα $[a,b]$, δηλαδή $f([a,b])=[a,b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$(f \circ g)(\rho)+(g \circ f)(\rho)=2\rho .$$

**28.** Δίνεται συνάρτηση $f$ ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$, $0<a<b$, συνεχής σε κάθε $x \in [a,b]$ και με $f([a,b])=[a,b]$. Αν η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a,b]$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ κόβει την ευθεία με εξίσωση $y=x$ ακριβώς σε ένα σημείο.

**29.** Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $m,n$ θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$mf(a)+nf(b)=(m+n)f(c) .$$

**30.** Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$, τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n},\ n \in N^* .$$

**31.** Ένα πρωί στις 8 ακριβώς, ένας προσκυνητής καλόγερος άρχισε να ανεβαίνει ένα βουνό στην κορυφή του οποίου βρισκόταν ένα γνωστό μοναστήρι. Ο καλόγερος βάδιζε ακανόνιστα όλη την ημέρα κάνοντας διάφορες στάσεις για να ξεκουραστεί και έτσι έφτασε στο μοναστήρι στις 8 το βράδυ. Μετά από μερικές ημέρες αφού προσευχήθηκε και μίλησε με τους μοναχούς του μοναστηριού, αναχώρησε από το μοναστήρι ξεκινώντας πάλι στις 8 το πρωί. Προφανώς κατά τη διάρκεια της κατάβασης ο μοναχός περπατούσε πιο γρήγορα από ότι κατά τη διάρκεια της ανάβασης και έτσι έφτασε πιο γρήγορα στη βάση του βουνού.

Δείξτε ότι στο δρόμο προς το μοναστήρι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο στο οποίο ο καλόγερος έφτασε όταν ανέβηκε και όταν κατέβηκε ακριβώς την ίδια στιγμή της ημέρας.

**32.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο [α,β]. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο [α,β] και ότι ισχύει $f^2(x)-5f(x)+6=0$ για κάθε $x$ στο [α,β]. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι σταθερή. Ποιός είναι ο τύπος της;

**33.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο R. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο R, ότι $f(0)=1$, και ότι ισχύει $f^2(x)-x^2=1$ για κάθε $x$ στο R. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.