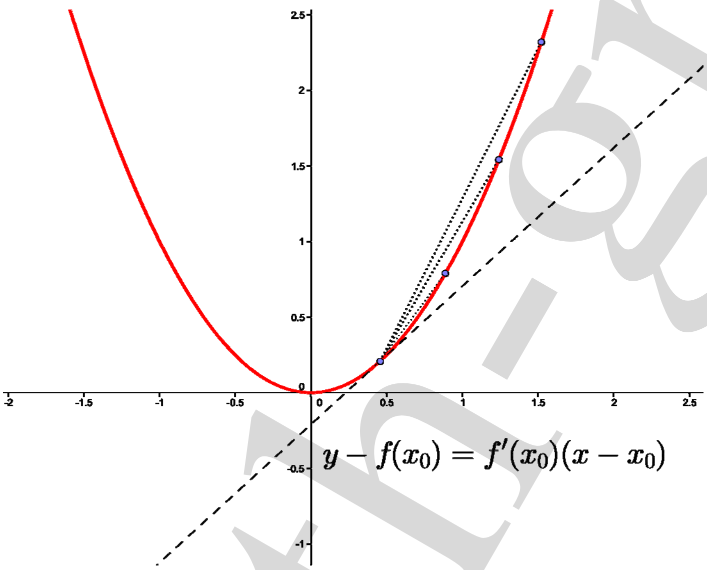
V. Διαφορικός Λογισμός



ΜΕΡΟΣ 1
Η έννοια της Παραγώγου

Α. Ορισμός

Εφαπτομένη καμπύλης συνάρτησης: Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α, την ευθεία που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Παραγώγιση: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

- Εναλλακτικά η παράγωγος μπορεί να ορισθεί με τον τύπο $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια (είναι πραγματικοί αριθμοί) και είναι ίσα, δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή $\lambda = f'(x_0)$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$.
- Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=x(t)$ στο t_0. Δηλαδή $v(t)=x'(t)$. Όμοια, η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης ταχύτητας στο t_0. Δηλαδή $a(t)=v'(t)=x''(t)$.

Θεώρημα Ι
Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Β. Παράγωγος Συνάρτηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A.

- Η f είναι **παραγωγίσιμη** στο A αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και επιπλέον $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in R$, $\lim_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in R$.

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A και έστω A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \to R$, τέτοια ώστε $x \to f'(x)$. Η συνάρτηση f' ονομάζεται **πρώτη παράγωγος** ή απλά παράγωγος της f. Με όμοιο τρόπο η παράγωγος της f' (αν υπάρχει) συμβολίζεται με f'' και ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f. Επαγωγικά ορίζεται η **ν-οστή παράγωγος** της f ως $f^{(\nu)} = \left(f^{\nu-1}\right)'$.

Παράγωγος Βασικών Συναρτήσεων	
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=x^\nu$	$f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$
$f(x)=\frac{1}{x^\nu}$	$f'(x)=-\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\sqrt[\mu]{x}$	$f'(x)=\frac{1}{\mu\sqrt[\mu]{x^{\mu-1}}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\text{ημ}(x)$	$f'(x)=\text{συν}(x)$
$f(x)=\text{συν}(x)$	$f'(x)=-\text{ημ}(x)$
$f(x)=\text{εφ}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\text{συν}^2(x)}$
$f(x)=\text{σφ}(x)$	$f'(x)=-\frac{1}{\text{ημ}^2(x)}$

Γ. Κανόνες Παραγώγισης

Κανόνας Αθροίσματος: $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$.

Κανόνας Βαθμωτού Γινομένου: $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$.

Κανόνας Γινομένου: $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Κανόνας Πηλίκου: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Κανόνας Σύνθετης Συνάρτησης (Κανόνας Αλυσίδας): $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Δ. Ρυθμός Μεταβολής

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού είναι η ταχύτητα του κινητού.
- Ο ρυθμός μεταβολής τη ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση του κινητού.
- Στην οικονομία, ο ρυθμός μεταβολής του κόστους (ως προς την ποσότητα παραγόμενου προϊόντος) ονομάζεται **οριακό κόστος**.

Ε. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης.

- Αν μας ζητείται να βρούμε την παράγωγο χρησιμοποιώντας τον **ορισμό**, τότε παίρνουμε το όριο και ακολουθούμε μεθοδολογία των ασκήσεων με όρια.
- Αν δεν ξέρουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά κάποιες σχέσεις που αυτή πληροί (π.χ. **ανισότητες**) τότε παίρνουμε τον ορισμό και υπολογίζουμε το όριο με μεθοδολογία ορίων (π.χ. **κριτήριο παρεμβολής**).
- Αν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, εφαρμόζουμε τους κανόνες παραγώγισης για να υπολογίσουμε την παράγωγο. Σε δίκλαδες συναρτήσεις υπολογίζουμε την παράγωγο κάθε κλάδου και στη συνέχεια ελέγχουμε αν υπάρχει η παράγωγος στα σημεία αλλαγής (είτε με τον ορισμό, είτε με πλευρικά όρια στην f').

Παραδείγματα: 1Α, 2Α, 3Α, 4Α, 1Β, 2Β, 3Β, 4Β, 5Β, 6Β, 7Β, 8Β σελ 219-221
1Α, 2Α, 3Α, 1Β, σελ 227-228
1Α, 2Α, 3Α, 4Α, 5Α, 6Α, 12Α, 13Α, 14Α, 15Α, 7Β σελ 238 - 240

2. Ασκήσεις που αφορούν εφαπτόμενες ευθείες της γραφικής παράσταση μιας συνάρτησης.

Για να βρούμε την **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, υπολογίζουμε την τιμή της παραγώγου $f'(x_0)$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$.
Επιπλέον δεν ξεχνάμε ότι:

- Δύο **παράλληλες** ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Δύο **κάθετες** ευθείες έχουν συντελεστές διεύθυνσης που ικανοποιούν τη σχέση $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτόμενης ευθείας είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

Προσοχή: Οι κατακόρυφες ευθείες δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης. Οι οριζόντιες ευθείες έχουν συντελεστή διεύθυνσης ίσο με το 0.

Αν η άσκηση μας ζητάει να βρούμε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης η εφαπτόμενη ευθεία είναι **παράλληλη** σε μια δοσμένη ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = \lambda$ ως προς x.

Αν η άσκηση μας ζητάει να βρούμε σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης η εφαπτόμενη ευθεία είναι **κάθετη** σε μια δοσμένη ευθεία με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq 0$, τότε λύνουμε την εξίσωση $f'(x) \cdot \lambda = -1$ ως προς x.

Σε όλες τις σχετικές ασκήσεις μπορεί να φανούν χρήσιμοι οι τύποι των αποστάσεων δύο σημείων, σημείου από ευθείας και του εμβαδού τριγώνου.

Για να αποδείξουμε ότι μια **ευθεία εφάπτεται στη γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων (της C_f και της ευθείας) και σε αυτά τα σημεία βρίσκουμε την εξίσωση της αντίστοιχης εφαπτόμενης ευθείας. Αν η εξίσωση που βρήκαμε ταυτίζεται με την δοσμένη ευθεία τότε αυτή πράγματι εφάπτεται στην C_f.

Για να βρούμε την **κοινή εφαπτόμενη** ευθεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων, f, g ακολουθούμε παρόμοια μεθοδολογία. Βρίσκουμε όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της C_f και κοιτάμε ποιές από αυτές εφάπτονται και στην C_g (ή αντιστρόφως).

Παραδείγματα: 2Β, 3Β, 4Β σελ 228-229

5Α, 7Α, 8Α, 9Α, 10Α, 11Α, 1Β, 2Β, 3Β, 4Β, 5Β, 8Β, 10Β, 11Β σελ 240 - 241

3. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να βρούμε κάποιες παραμέτρους ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη.

Σε τέτοιες ασκήσεις συνήθως καταλήγουμε σε ένα σύστημα. Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση που μας δίνεται πρέπει να είναι συνεχής. Έτσι μπορούμε να πάρουμε (π.χ.) τα πλευρικά όρια. Η δεύτερη εξίσωση θα προκύψει ουσιαστικά από τον ορισμό της παραγώγου (μπορούμε να πάρουμε κι εδώ τα πλευρικά όρια).

4. Προβλήματα.

Προσπαθούμε να εκφράσουμε την ζητούμενη ποσότητα ως συνάρτηση των άλλων μεταβλητών του προβλήματος. Στη συνέχεια ανάλογα με το πρόβλημα υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής (παράγωγος) και τον χρησιμοποιούμε κατάλληλα.

Παραδείγματα: Ασκήσεις στις σελίδες 243-245

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2-5x+7$ στο σημείο $x_0=1$.

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x}+2x$ στο σημείο $x_0=1$.

3. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

4. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-1 & x\le 1 \\ \sqrt{x+3}+x-2 & x>1 \end{cases}.$$

5. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\eta\mu x & x\le 0 \\ -2x^2+2x & x>0 \end{cases}.$$

6. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sigma\upsilon\nu x & x\ne 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}.$$

7. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^3$.

8. Αν μια άρτια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (-α, α), να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

9. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f, η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμη στο $0\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(|x|)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν ισχύει $f'(0)=0$.

10. Δύο συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες στο R και για κάθε $x\in R$ είναι $g(x)=x\cdot f(x)$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

11. Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες στο R και παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0=0$. Αν ισχύει ότι $f(0)=g(0)$ και $f(x)+x\ge g(x)$ για κάθε $x\in R^*$, τότε να δείξετε ότι $g'(0)-f'(0)=1$.

12. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R_+^* και παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi\in R_+^*$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\sqrt{x}f(x)-\sqrt{\xi}f(\xi)}{x-\xi}=\frac{2\xi\cdot f'(\xi)+f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}.$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu x+2x^2-2x}{x-1}$, όπου η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο R με $f(1)=0$. Αν γνωρίζουμε ότι $g'(1)=4$ και $g(1)=2$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 1.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g,h ορισμένες στο R, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:
Α) $f(0)=g(0)=h(0)$,
Β) $f(x)<h(x)<g(x)$,

Γ) $f'(0)=g'(0)$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 0.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f:R_+^* \to R$, τέτοια ώστε για κάθε $x,y \in R_+^*$ να ισχύει η σχέση $f(xy)=f(x)f(y)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R_+^*$. Επιπλέον δείξτε ότι $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}f'(1)$.

16. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο σημείο a, με $f(a)\neq 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο a.

17. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει ότι:
Α) $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$,
Β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0>0$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $(0,+\infty)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R, για την οποία ισχύουν:
Α) $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y$, για κάθε $x,y\in R$,
Β) $f'(0)=1$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

19. Δύο συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σε ένα διάστημα Δ=(α,β) και ισχύει $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$. Αν $x_0\in\Delta$ με $f(x_0)=g(x_0)$ και οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=g'(x_0)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $x_0\in R$ και ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)}{h}=2,$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

21. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β, γ, ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x+\gamma & x\le 0\\ \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x>0\end{cases},$$

Να είναι παραγωγίσιμη στο R.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)$. Δείξτε ότι $f''(x)-2\alpha f'(x)+(\alpha^2+\beta^2)f(x)=0$

23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

Α) βρείτε την παράγωγο της f
Β) Αποδείξτε ότι η f' είναι συνεχής.
Γ) Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x}$.

24. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f \circ f$.

25. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f (ορισμένη στο R) είναι άρτια, δείξτε ότι η f' είναι περιττή.

26. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση f (ορισμένη στο R) είναι περιττή, δείξτε ότι η f' είναι άρτια.

27. Δίνεται οι δύο φορές παραγωγίσιμη περιττή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα (-α,α). Δείξτε ότι $f''(0)=0$.

28. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε όλο το R. Αν $g(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)f(x)+\eta\mu x$, δείξτε ότι $g'(0)=1$.

29. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-a)^2$ είναι $xP'(a)+\left(P(a)-aP'(a)\right)$.

30. Α) Αν $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του δύο, αποδείξτε ότι

$$P(x)=(x-\rho)^2\pi(x) \Leftrightarrow P(\rho)=P'(\rho)=0.$$

Β) Δείξτε ότι το $(x+1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x)=x^{2n}-nx^2+n-1$, $n\geq 1$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β έτσι ώστε το $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του $Q(x)=\alpha x^{2n}+\beta x^{n-1}+4$, $n\geq 2$.

31. Δίνεται το πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f(x)$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2, x_3 (διαφορετικούς ανά δύο). Δείξτε ότι

$$\frac{x_1}{f'(x_1)}+\frac{x_2}{f'(x_2)}+\frac{x_3}{f'(x_3)}=0.$$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{f'(x)}{y}=\dfrac{f'(y)}{x}$, για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$,

Β) Αν $f'(1)=1$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

33. (**Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης**)
Δίνεται η 1-1 συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αποδείξτε τα εξής:

Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του διαστήματος Δ, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του διαστήματος Δ και $f'(x_0)\neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $f(\Delta)$ και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)},\ \text{για κάθε } x\in f(\Delta).$$

Δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\etaμx$, ορισμένη στο διάστημα (-π/2, π/2). Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f^{-1}.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία είναι 1-1 και παραγωγίσιμη. Αν για κάποιο σημείο x_0 ισχύει η σχέση $f'\left(f^{-1}(x_0)\right)=0$, δείξτε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

35. **G** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+3$, στο σημείο $x_0=1$.

36. **G** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x\ln(x)$, στο σημείο $x_0=1$.

37. **G** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ στο σημείο $x=0$.

38. **G** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-2}-x$, στο σημείο $x_0=3$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία στα οποία η τιμή της συνάρτησης είναι ίδια με την τιμή της παραγώγου.

40. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x-2|}+x$, στο σημείο $x_0=1$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη και σε ποια όχι;

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\etaμx & \text{x} \le 0 \\ \sqrt{x} & x>0 \end{cases}$. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη και σε ποια όχι;

43. **G** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία που διχοτομεί το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

44. **G** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$. Να βρείτε σημείο Μ της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο Μ να είναι κάθετη στην ευθεία $y-x+1=0$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln(x)$. Αν Α είναι το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$ και Β το σημείο τομής της C_g με τον $x'x$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτόμενη των C_f, C_g.

46. **G** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-ax+2$. Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η ευθεία $2x-y=0$ να εφάπτεται στην C_f.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+1$. Δείξτε ότι για κάθε a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της
G C_f στο σημείο $x_0=1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2+x+1$.
G Α) Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $x_0=1$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Β) Να προσδιορίσετε το a έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο σημείο $x_0=1$ να σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+c$.
G Α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρία σημεία Α, Β, Γ της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στον άξονα x.
Β) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο με σταθερό εμβαδό.
Γ) Να δείξετε ότι το βαρύκεντρο του τριγώνουν ΑΒΓ είναι σημείο του άξονα y.

50. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα x.

51. Έστω Α ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=e^x\eta\mu x$ και $g(x)=\eta\mu x$, όπου το πεδίο ορισμού και των δύο συναρτήσεων είναι το διάστημα $(-\pi,\pi)$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g. έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο Α.

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+3x-2}$.
Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a,b, έτσι ώστε η C_f να περνά από την αρχή των αξόνων και εφαπτομένη της στο σημείο $x=-1$ να είναι κάθετη στην ευθεία $2x-2y+5=0$.

53. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2bx+1 & x<1 \\ cx^2+x & x\geq 1 \end{cases}.$$
Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a,b,c για τις οποίες η γραφική παράσταση της f στο σημείο $x_0=1$, έχει εφαπτόμενη παράλληλη στην ευθεία $x-2y+1=0$.

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a\cdot e^{-bx}$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a,b, έτσι ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $(0{,}1)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $x=1$, να είναι κάθετη στην ευθεία $2x+y=1$.

55. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
G $f(x)=3x^2+ax+2$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ να έχουν κοινή εφαπτόμενη σε ένα κοινό τους σημείο.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+2$. Για ποια τιμή της παραμέτρου a, υπάρχουν εφαπτόμενες
G που διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

57. Να βρεθεί ο $a\in R$, έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax-\dfrac{1}{4}x^3$ σε ένα κοινό σημείο με τον άξονα των x να σχηματίζει γωνία π/4 με τον άξονα αυτό. Η εφαπτομένη αυτή έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f;

58. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-x^2+4x$ και $g(x)=a/x$, $a\neq 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του a η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $x_0=1$ εφάπτεται και στην C_g.

59. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x)/f'(x)$ σε ένα κοινό σημείο της με τον άξονα x, σχηματίζει γωνία π/4 με αυτόν.

60. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln(ax)}{x},\ x>0,\ a>0.$$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x=\mu$.

Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε a, η εφαπτομένη που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα διέρχεται από σταθερό σημείο το οποίο και να βρείτε.

61.
G Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ και τα σημεία $A(x_0,f(x_0))$, $B(x_0,g(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α κόβει τον άξονα των x στο σημείο Γ, ενώ η εφαπτομένη της C_g στο Β κόβει τον άξονα των x στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι

Α) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του x_0).

Β) Το ΑΔΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο

Γ) Το Β είναι το ορθόκεντρο του ΑΔΓ.

62.
G Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=a/x$, $a\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Από κάθε σημείο του άξονα x διέρχεται μόνο μια εφαπτόμενη της C_f.

Β) Η εφαπτόμενη αυτή σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

63. Δίνονται τρεις συναρτήσεις f,g,h ορισμένες στο R για τις οποίες υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in R$:

- Η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x)\neq 0$,
- Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη,
- $g(x)=f(x)h'(x)$,
- $(h(x))^2+(h'(x))^2=1$,

Αν το (x_0,y_0) είναι ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f,g, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν στο (x_0,y_0) κοινή εφαπτομένη.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2$, $a\neq 0$ και τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$.

Α) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα Α, Β τέμνονται σε σημείο Μ του άξονα y αν και μόνο αν $x_1=-x_2$.

Β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α, Β, Μ έτσι ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

65. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=-1/x$.

Α) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Β) Αν Α, Β, είναι τα σημεία επαφής της ευθείας με τις C_f και C_g και Γ, Δ τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες x και y αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το Β είναι μέσον του ΓΔ και το Γ μέσον του ΑΔ.

ΜΕΡΟΣ 2
Θεώρημα Μέσης Τιμής

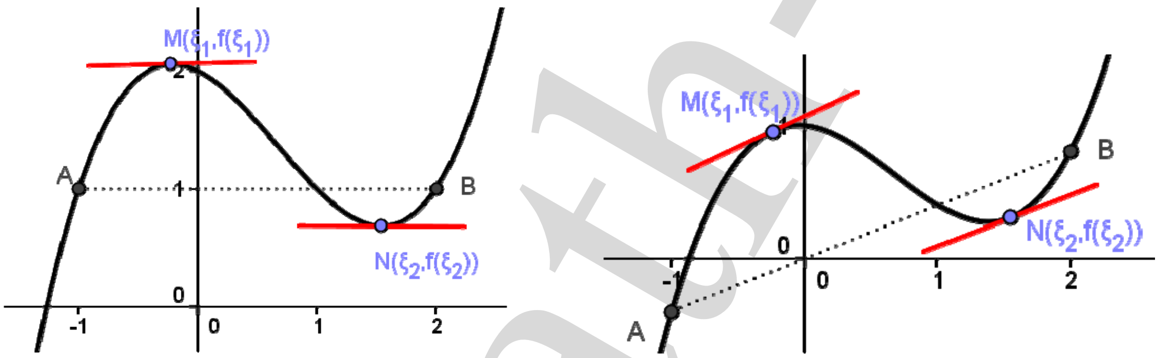
Α. Θεωρία

Θεώρημα Rolle
Αν μια συνάρτηση είναι
- Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β],
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού
Αν μια συνάρτηση είναι
- Συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β],
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.



(α) (β)

Σχήμα 1. Γεωμετρική ερμηνεία (α) του θεωρήματος Rolle και (β) του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Θεώρημα
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα Δ.

Θεώρημα
Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε υπάρχει σταθερός αριθμός c τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)+c$, για κάθε σημείο του Δ.

Β. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα (ή ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ έτσι ώστε να ισχύει μια σχέση).

Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, ο κλασικός τρόπος αντιμετώπισης μιας τέτοιας άσκησης είναι η χρήση του θεωρήματος **Bolzano**. Υπάρχουν ιδιαίτερες περιπτώσεις όμως κατά τις οποίες η εφαρμογή του θεωρήματος Rolle είναι προσφορότερη. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

Α) Η άσκηση μας ζητάει να εξετάσουμε για ρίζες μια δοσμένη εξίσωση, η οποία προκύπτει ως παράγωγος μιας άλλης εξίσωσης που εξετάσαμε σε προηγούμενα ερωτήματα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων ασκήσεων είναι οι 1,2 Β΄ ομάδας στη σελίδα 249, 250. Μην ξεχνάτε ότι αν η άσκηση μας ζητάει να αποδείξουμε ότι η ρίζα είναι **μοναδική** πρέπει να βρούμε τη μονοτονία της συγκεκριμένης συνάρτησης.

Β) Αν η εξίσωση εμπλέκει **συναρτήσεις και παραγώγους**, των οποίων οι τύποι είναι άγνωστοι. Σε αυτή την περίπτωση το θεώρημα **Rolle** είναι η ενδεδειγμένη μεθοδολογία. Προσοχή όμως! Θα πρέπει να ορίσουμε μια **κατάλληλη συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος να δίνει την δοσμένη εξίσωση**. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle παίρνουμε τη λύση.

2. Ασκήσεις στις οποίες μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα (ή συγκεκριμένο αριθμό ριζών).

Ο κλασικός τρόπος αντιμετώπισης μιας τέτοιας άσκησης είναι να εξετάσουμε την **μονοτονία** της αντίστοιχης συνάρτησης. Εναλλακτικά όμως, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι άγνωστη, αλλά γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητες τις παραγώγου της, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα **Rolle**. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες, εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle και καταλήγουμε σε **άτοπο**.

Με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **το πολύ δυο ρίζες,** κ.ο.κ. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι η συνάρτηση έχει τρεις ρίζες, εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle δύο φορές και παίρνουμε δύο σημεία ξ_1, ξ_2, τα οποία μηδενίζουν την παράγωγο. Έτσι αναγόμαστε στην παραπάνω περίπτωση. Εφαρμόζοντας μια ακόμη φορά το θεώρημα Rolle για την παράγωγο της συνάρτησης βρίσκουμε μια ρίζα της δεύτερης παραγώγου και καταλήγουμε σε άτοπο. Βέβαια, μπορεί να καταλήξουμε σε άτοπο χωρίς να χρειαστεί να εφαρμόσουμε και δεύτερη φορά το θ. Rolle, αν γνωρίζουμε ότι είναι αδύνατον η παράγωγος να έχει δύο ρίζες.

Δεν ξεχνάμε ότι για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει **μια τουλάχιστον ρίζα** (ή δύο τουλάχιστον κ.ο.κ.) εφαρμόζουμε το **θεώρημα Bolzano**.

Παρατηρήσεις:

- Ένα πολυώνυμο έχει το πολύ ν ρίζες (όπου ν είναι ο βαθμός του).
- Αν μια συνάρτηση έχει ν ρίζες, τότε η παράγωγός της θα έχει οπωσδήποτε ν-1 ρίζες, η δεύτερη παράγωγος ν-2, κ.ο.κ.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 3, 7 σελ. 250.

3. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η απόδειξη μιας ανισότητας.

Συνήθως η απόδειξη ανισωτήτων γίνεται μέσω της μελέτης μιας συνάρτησης όπως θα δούμε παρακάτω. Όμως, πολλές φορές σε ασκήσεις τέτοιας μορφής το **ΘΜΤ** του διαφορικού λογισμού είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Το δύσκολο σημείο (όχι πάντα) είναι να βρούμε το διάστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα αλλά και τη συγκεκριμένη συνάρτηση. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

Α) Η άσκηση μας ζητάει να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση μεταξύ άγνωστων συναρτήσεων (**με δύο παραμέτρους ή μεταβλητές**). Για παράδειγμα θεωρείστε την σχέση $F(a,b) < G(a,b)$. Σε αυτή την περίπτωση μετασχηματίζουμε την ανισότητα έτσι ώστε το ένα μέλος της να πάρει τη μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα [α, β] για τη συνάρτηση f και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ανισοτική σχέση χρησιμοποιώντας την παράγωγο της f στο σημείο ξ, αντί για το κλάσμα $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Β) Γενικά, αν έχουμε μια άσκηση που μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και μας δίνει κάποιες σχέσεις με **ανισότητες** που αφορούν την **παράγωγο**, είναι πολύ πιθανό αυτή η άσκηση να λύνεται με τη βοήθεια του **ΘΜΤ**. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ, παίρνουμε τη δοσμένη σχέση για την παράγωγο και καταλήγουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα.

Γ) Τέλος, με το ΘΜΤ μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και ασκήσεις που μας ζητάνε την απόδειξη **μιας απλής ανισότητας ως προς x (μια μεταβλητή)**. Για παράδειγμα θεωρείστε μια σχέση της μορφής $F(x) < G(x)$. Σε αυτή την περίπτωση μεταφέρουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για τη δοσμένη συνάρτηση ($f(x) = F(x) - G(x)$) στο διάστημα [α, x] ή στο διάστημα [x,α]. Ιδιαίτερη προσοχή θέλει η επιλογή του αριθμού α (πολύ συχνά χρησιμοποιούμε το 0 ή το 1). Από εκεί μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

Παραδείγματα: 3Α, 4Β, 5Β σελ. 249 – 250.

4. Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι σταθερή, ή ότι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Εφαρμόζουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα. Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) = 0$. Για να δείξουμε ότι δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά, αρκεί ναι δείξουμε ότι $f'(x) = g'(x)$. Η σταθερά μπορεί να υπολογιστεί αν ξέρουμε την τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο x_0.

Παρατηρήσεις
- Αν $f'(x) = c_1$, τότε υπάρχει κάποιο c_2 τέτοιο ώστε $f(x) = c_1 x + c_2$.
- Αν $f'(x) = c \cdot f(x)$, τότε υπάρχει κάποιο d τέτοιο ώστε $f(x) = d \cdot e^{c \cdot x}$.

Σε όλες τις παραπάνω ασκήσεις (όλων των κατηγοριών) είναι πολύ χρήσιμοι οι παρακάτω κανόνες.
- $\left(f(x)\cdot \text{ημ}x\right)' = f'(x)\text{ημ}x + f(x)\text{συν}x$
- $\left(f(x)\cdot \text{συν}x\right)' = f'(x)\text{συν}x - f(x)\text{ημ}x$
- $\left(\frac{f(x)}{\text{ημ}x}\right)' = \frac{f'(x)\text{ημ}x - f(x)\text{συν}x}{\text{ημ}^2 x}$
- $\left(\frac{f(x)}{\text{συν}x}\right)' = \frac{f'(x)\text{συν}x + f(x)\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x}$
- $\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
- $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- $\left(f(x)e^x\right)' = f'(x)e^x + f(x)e^x$
- $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}}$
- $\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)' = \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{f^2(x)}$

Ασκήσεις

Θεώρημα Rolle - Εξισώσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + a^2$. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-2,2] και έπειτα να υπολογιστεί $\xi \in (-2,2)$ το οποίο ικανοποιεί το θεώρημα.

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζετε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση

$f(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$,

στο διάστημα [-3, 3]. Αν απαντήσετε θετικά υπολογίστε το ξ του θεωρήματος.

3. Μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f με $f(x) = |x-1|$ στο διάστημα [0,2];

4. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β]. Αν ισχύουν οι σχέσεις $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f''(x_1) = f''(x_2)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο διάστημα (1,2), στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2(2\ln x - 1) + 8x(\ln x - 1) = -8$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1,2).

7. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $8x^3 - 12x^2 - 6x + 5 = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1).

8. Δείξτε ότι η εξίσωση $2^x = \frac{1}{x}$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (0,1).

9. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 - 2012x + c = 0$ δε μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (0,1).

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

11. Δείξτε ότι η εξίσωση $2x^3 - 3x^2 + \text{ημθ} = 0$, $\theta \in R$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα (0,1).

12. Αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μοναδική ρίζα.

13. Δίνεται η εξίσωση $x^{2013} = 2013x - \ln\theta$, $\theta > 0$. Αποδείξτε ότι έχει το πολύ δύο ρίζες στο διάστημα (0,2013).

14. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^{2014} + \lambda x - 2 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου λ.

15. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + a^2x^3 + (a^4+1)x^2 + a^2$. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, το πολυώνυμο δε μπορεί να έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

16. Αν το πολυώνυμο $f(x)$ έχει ν πραγματικές ρίζες ($\nu \geq 2$) διαφορετικές ανά δύο, να αποδείξετε ότι το $f'(x)$ έχει τουλάχιστον ν-1 πραγματικές ρίζες.

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $x_1 \in (-\pi, 0)$ και $x_2 \in (0, \pi)$.

18. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $a^x = x - b$, $0 < a < 1$, $b \in R$, έχει μια μοναδική πραγματική ρίζα.

Θεώρημα Rolle – Θεωρητικές Ασκήσεις

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι:
Α) Για τη συνάρτηση $G(x) = (x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)}$ εφαρμόζεται το θ. Rolle στο διάστημα [α,β].
Β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{1}{\alpha - \xi} + \dfrac{1}{\beta - \xi}$.

20. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο (α,β), δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο [α,β].

21. Θεωρούμε μια συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), με την ιδιότητα $f(\alpha) - f(\beta) = \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ που ανήκει στο (α,β) τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi$.

22. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμες στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Αν ισχύει η σχέση $g(0) = f(\pi/2)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $\left(g(\xi) - f'(\xi)\right)\varepsilon\varphi\xi = f(\xi) + g'(\xi)$.

23. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο [0,1], με $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0) = g(1) = 0$, δείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 0$, έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα στο διάστημα (0,1).

24. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [-1,1] και για την οποία ισχύει η σχέση $f(0) = \dfrac{f(-1) + f(1)}{2}$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 0$.

25. **ΘΜΤ** Η συνάρτηση f και η παράγωγός της είναι παραγωγίσιμες στο [α,β]. Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα (α,β) με $f''(\xi) = 0$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο (e, e^2) και συνεχής στα σημεία e, e^2, για τα οποία ισχύει $f(e^2) = 2f(e)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (e, e^2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)\ln\left(x_0^{x_0}\right) = f(x_0)$.

27. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = e^{-cx} f(x)$, για κάποιο πραγματικό αριθμό c, τέτοια ώστε $g(\alpha) = g(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει x_0 στο ανοικτό διάστημα (α,β) τέτοιο ώστε $f'(x_0) = c \cdot f(x_0)$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς και παραγωγίσιμες στο [a,b]. Αν ισχύουν οι σχέσεις $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, για κάθε x στο [a,b] και $f(b)g(a) - f(a)g(b) = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

29. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,2] με $f(2)=2f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$, τέτοιος ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

30. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι

Α) Υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα (α,β) τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$.

Β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο (c,0).

31. (Θεώρημα Cauchy)
Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Επίσης ισχύει ότι $g(a) \neq g(b)$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο διάστημα (a,b). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \mathrm{b})$ τέτοιος ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

ΘΜΤ

32. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,3]. Αν είναι $2f(2)=f(1)+f(3)$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(x_0)=0$.

33. Να εφαρμόσετε το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(x)=x(1-\ln x)$ στο διάστημα [1,e].

34. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,1] τέτοια ώστε $f(0)=2$ και για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $|f'(x)| \leq 3$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0,1)$, ισχύει $-1 < f(x) < 5$.

35. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [1,3] και παραγωγίσιμη στο (1,3). Αν ισχύει η σχέση $f(1)=\dfrac{f(3)}{3}=1$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία $a,b \in (1,3)$ με $1<a<2<b<3$ τέτοια ώστε να ισχύει $f'(a)+f'(b)=2$.

36. **ΜΟΝ** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \subset \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η ταυτότητα $\dfrac{a}{\mathrm{b}} < \dfrac{\eta\mu a}{\eta\mu b}$.

37. Αν ισχύει $0<a<b$, δείξτε ότι $1-\dfrac{a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a}-1$.

38. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\beta| \leq \pi|\alpha - \beta|$, όπου $0<\alpha\leq\beta<\pi/2$.

39. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $|f'(x)| \leq \eta\mu a$, $a \in R$ για κάθε x. Δείξτε ότι $|f(1)+f(4)| \leq 3$.

40. Αν $0<b\leq a<\dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2 b} \leq \varepsilon\varphi a - \varepsilon\varphi b \leq \dfrac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2 a}$.

41. Αν $0 < b \leq a < \pi/2$, δείξτε ότι $\left|a \cdot ημ^2 a - b \cdot ημ^2 b\right| \leq 3|a-b|$.
?

42. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι ισχύει $(b-a)εφa < \ln\left(\frac{συνa}{συνb}\right) < (b-a)εφb$, όπου $0 < α < b < \frac{\pi}{2}$.

43. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 με $f(0) = y_0$ και υπάρχει $u \in R$, τέτοιος ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $f'(x) \geq ημu$, δείξτε ότι $f(x) \geq y_0 + x \cdot ημu$.

44. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [a,b] και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $|f'(x)| < \theta$ για κάθε $x \in (a,b)$. Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| < \theta|x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [a,b]$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $|ημx - ημy| \leq |x-y|$, για κάθε x,y.

45. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β), $a > 0$. Θεωρούμε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$, $\kappa < \lambda$, τέτοιο ώστε $\alpha + \beta = \kappa + \lambda$ και ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,β), δείξτε ότι $f(\alpha) + f(\beta) < f(\kappa) + f(\lambda)$.

46. Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [a,b] και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a) \neq f(b)$. Να αποδείξετε ότι:
Α) Η εξίσωση $2f(x) = f(a) + f(b)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,b).
Β) Υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(b-a)}{f(b) - f(a)}.$$

47. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0,c] \to R$, τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f(c) = c \neq 0$.
Α) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,c)$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = c - \xi$.
Β) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,c), δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,c)$ με $0 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < c$, τέτοιοι ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = 1$.

48. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [a,b] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, x+h \in [a,b]$, $h \neq 0$, υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x+h) - f(x) = hf'(x+ch)$.

49. Αποδείξτε ότι $2\ln(x+1) > 2x - x^2$ για κάθε $x > 0$.

50. Δείξτε ότι για κάθε x>0 ισχύει $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

51. Αποδείξτε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε x.

52. Αν $0 < a < 1$, δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $(1+x)^a < 1 + ax$.

Σταθερές Συναρτήσεις

53. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, ισχύει $f'(x) - g(x) = 0$, $f(x) + g'(x) = 0$, για κάθε x στο R και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερή στο R και να βρείτε τον τύπο της.

54. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)-2f(-x)=0$ για κάθε x. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)$ είναι σταθερή.

55. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε x,y. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

56. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f''(x)=x$ και $f(0)=f(1)=1$.

57. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R_+^*$ με $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f.

58. Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε $f''(x)=f^2(x)$ για κάθε $x\in R$. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{2}{3}f^3(x)-(f'(x))^2+2$, $x\in R$.

Α) Δείξτε ότι η g είναι σταθερή.

Β) Αν $f(1)=0$ και $f'(1)=-1$, δείξτε ότι $3(f'(x))^2-2f^3(x)=3$

59. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει

- Οι f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R.
- $f''(x)=g''(x)$, για κάθε x.
- $f(0)=g(0)$.

Να αποδείξετε ότι :

Α) Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε x να ισχύει $f(x)-g(x)=cx$.

Β) Αν $x_1<0<x_2$ είναι ρίζες της g, τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

60. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Α με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$. Αν το Α δεν είναι διάστημα, να εξηγήσετε ότι η f μπορεί και να μην είναι σταθερή στο Α.

61. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσμη στο R. Να αποδείξετε ότι για κάθε x ισχύει $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x$, όπου c μια σταθερά. Στη συνέχεια, να προσδιοριστεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν $g'(x)\text{συν}x+g(x)\text{ημ}x=g(x)\text{συν}x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $g(0)=2014$.

62. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσμη στο R και ισχύει $f'(x)+f(x)=0$, για κάθε x στο R αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x)=ce^{-x}$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί συνάρτηση g, παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$, όταν $g(e)=e^{-e}$ και $(g(x)+g'(x))\ln(x^x)+g(x)+g(x)\ln(x)=0$, για κάθε $x>1$.

63. Μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και ικανοποιεί τις συνθήκες $g'(e^x)=\text{ημ}x+\text{συν}x$ για κάθε x στο R και $g(1)=1$. Υπολογίστε τον αριθμό $g(\pi)$.

64. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και για κάθε $a,b\in(0,+\infty)$ ισχύει η σχέση $f(ab)=af(b)+bf(a)$. Να αποδείξετε ότι

Α) $f(1)=0$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$ με $f'(1)=2014$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα $(0,+\infty)$. Επιπλέον δείξτε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει η σχέση $xf'(x)-f(x)=2014x$ και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.