

Η πρό(σ)κληση του STEM Μέρος Β' - Ο Παλμογράφος στην διδασκαλία της τριγωνομετρίας

Παντελής Μπουμπούλης, Σωτήρης Τσαντίλας, Γεώργιος
Πολυζώης, Παναγιώτης Χαρατζόπουλος
Ζάννειο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο
panbouboulis@gmail.com, stsant@phys.uoa.gr, gpolizois@edc.uoc.gr,
panharatz@yahoo.gr
bouboulis.mysch.gr, users.uoa.gr/~stsant/

Περίληψη. Η τριγωνομετρία είναι μια από τις δυσκολότερες μαθηματικές ενότητες που περιέχονται στο πρόγραμμα σπουδών του Λυκείου. Εξ' αιτίας των αφηρημένων εννοιών που εμπλέκονται και της έλλειψης σύγχρονων πρακτικών εφαρμογών πολλοί μαθητές είτε αδιαφορούν είτε περιορίζονται σε μια στείρα απομνημόνευση κανόνων και πρακτικών. Σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης του φαινομένου, σε αυτό το άρθρο παρουσιάζεται μια διαθεματική διδακτική προσέγγιση βασισμένη στις αρχές της μάθησης με διερεύνηση η οποία ενσωματώνει στοιχεία από την λογική STEM (Science - Technology - Engineering - Mathematics) που εμπλέκει την έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης, με ένα σύγχρονο τεχνολογικό εργαλείο, τον Παλμογράφο. Για την προσομοίωση της λειτουργίας του παλμογράφου χρησιμοποιείται το γνωστό λογισμικό δυναμικών αναπαραστάσεων Geogebra.

Λέξεις κλειδιά : Τριγωνομετρία, Παλμογράφος, STEM, Τεχνολογία, Χώρος Εργασίας, Μάθηση με Διερεύνηση.

1 Εισαγωγή

Είναι αποδεικτό ότι η Άλγεβρα είναι ένα από τα σημαντικότερα μαθήματα που προσφέρονται στους μαθητές του Λυκείου, τόσο για τη γενικότερη μαθηματική κατάρτισή τους, όσο και για την προετοιμασία τους για τη δοκιμασία των Πανελλαδικών εξετάσεων. Το σχετικό πρόγραμμα σπουδών είναι σχεδιασμένο έτσι ώστε οι μαθητές να αναπτύσσουν βασικές μαθηματικές δεξιότητες αλλά και να έρχονται σε επαφή με δύσκολες έννοιες, από τα κεφάλαια των πιθανοτήτων, συναρτήσεων, γραμμικών συστήματων, τριγωνομετρίας, κ.λπ., οι οποίες είναι θεμελιώδεις για ένα πλήθος επιστημών [3]. Πολλές από αυτές τις έννοιες, όμως, παρουσιάζονται αποσπασματικά, χωρίς να φαίνεται η σύνδεση μεταξύ τους, αλλά και μεταξύ των άλλων επιστημονικών αντικειμένων. Επιπλέον,

οι σχετικές εφαρμογές είτε στην καθημερινή ζωή, είτε σε πραγματικά επιστημονικά ή τεχνολογικά προβλήματα παρουσιάζονται ελάχιστα ή και καθόλου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την μείωση του ενδιαφέροντος από την μεριά των μαθητών και τον αποπροσανατολισμό της μαθησιακής διαδικασίας, αφού οι περισσότεροι συνήθως περιορίζονται σε μια στενή, φροντιστηριακού τύπου, προσέγγιση του μαθήματος. Είναι χαρακτηριστικό ότι ακόμη και άριστοι μαθητές δυσκολεύονται να αξιοποιούν μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες (στις οποίες είναι ικανότατοι) για να επιλύσουν ένα απλό πρακτικό πρόβλημα. Οι ίδιοι μαθητές όμως όταν καλούνται να επιλύσουν ένα αφηρημένο μαθηματικό θέμα ή μια δύσκολη άσκηση ανταποκρίνονται ικανοποιητικότερα συνδυάζοντας κανόνες από προηγούμενες γνωστές ασκήσεις. Επιπλέον, η στείρα αποστήθιση κανόνων και μεθοδολογίας ασκήσεων είναι αντίθετη προς τον βασικό σκοπό τους μαθήματος, την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης [14, 15].

Με σκοπό την επίλυση τέτοιων θεμάτων, τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αξιοσημείωτες προσπάθειες ώστε να προωθηθεί η διερευνητική μάθηση στη μαθηματική εκπαίδευση, κυρίως με τη χρήση των ΤΠΕ [9]. Έτσι έχει δημιουργηθεί ένας μεγάλος αριθμός σεναρίων πολλαπλών αναπαραστάσεων, βασισμένων στις αρχές της μάθησης βασισμένης στη διερώτηση [1]. Λίγα όμως από αυτά τα σενάρια εξετάζουν τη διαδικασία μαθηματικής μοντελοποίησης πραγματικών και επιστημονικών προβλημάτων, αλλά και τη διασύνδεση της μαθηματικής γνώσης με άλλες επιστήμες, ακόμα και στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος σπουδών [4]. Έτσι η παρουσίαση των μαθηματικών στο Λύκειο παραμένει γενικά αποκομμένη από το βασικό σκοπό για τον οποίο αυτά αναπτύχθηκαν.

Σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης αυτών των ζητημάτων και της προώθησης της έννοιας της μαθηματικής μοντελοποίησης πραγματικών προβλημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στο Ζάννειο Πρότυπο Λύκειο λειτουργούν εδώ και δύο χρόνια Όμιλοι Αριστείας σχετικού περιεχομένου (<http://sima-club.weebly.com>). Οι συμμετέχοντες μαθητές εμπλέκονται σε διαθεματικές δραστηριότητες που συνδέουν τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες (όπως η Αστρονομία και η Πληροφορική), αλλά και με πιο πρακτικά προβλήματα στα πλαίσια των αρχών της διδασκαλίας STEM.

Σε αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε μια από τις δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια αυτών των ομίλων. Η δραστηριότητα αυτή συνδέει την ύλη της τριγωνομετρίας της Β' Λυκείου και ειδικότερα την έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης, με τις έννοιες της περιόδου και της συχνότητας από την κυματική, μέσω της λειτουργίας του παλμογράφου, μιας συσκευής που χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πολλούς τομείς τεχνολογίας και έρευνας (εικόνα 1) [8]. Είναι γνωστό ότι η τριγωνομετρία όπως μελετάται στα προγράμματα σπουδών των περισσότερων χωρών δυσκολεύει ιδιαίτερα τους μαθητές [2, 7]. Τόσο οι αφηρημένες έννοιες που εμπλέκονται, όσο και η έλλειψη εμπειρίας από

την καθημερινότητα περιορίζουν τις δυνατότητες κατανόησης πολλών μαθητών. Για το σκοπό αυτό έχει προταθεί πλήθος τεχνικών που συνδυάζουν μάθηση με εφαρμογή και διερεύνηση [2, 15, 16], είτε τεχνικές πολλαπλών αναπαραστάσεων και δυναμικών λογισμικών, όπως το Geogebra, και άλλα [7, 11, 18], είτε ακόμη και δυνατότητες λογισμικών τύπου CAS [13, 5]. Ελάχιστα (ή και καθόλου) έχει διερευνηθεί το θέμα της διδασκαλίας τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε σύνδεση με άλλες επιστήμες και την τεχνολογία, παρά το πλήθος πλεονεκτημάτων που μια τέτοια προσέγγιση μπορεί να προσφέρει, ιδιαίτερα στο θέμα της προσφοράς κινήτρων προς τους μαθητές και της σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών με έννοιες της σύγχρονης καθημερινότητας (μουσική, εικόνα, τηλεπικοινωνίες, κ.λ.π.).

Η ομαδοσυνεργατική δραστηριότητα που αναπτύσσεται παρακάτω μπορεί να υλοποιηθεί σε ένα οποιοδήποτε εργαστήριο Η/Υ, χωρίς τη χρήση της πραγματικής συσκευής. Για το σκοπό αυτό έχουμε αναπτύξει σε Geogebra μια προσομοίωση της λειτουργίας του παλμογράφου, προσαρμόζοντας κατάλληλες δραστηριότητες στις οποίες θα εμπλακούν οι ομάδες [6]. Το παρόν άρθρο οργανώνεται ως εξής: Η παράγραφος 2 περιέχει μια σύντομη αναφορά στις αρχές λειτουργίας του παλμογράφου. Στην παράγραφο 3 αναπτύσσεται το κυρίως διδακτικό σενάριο, ενώ η παράγραφος 4 περιέχει κάποια συμπεράσματα.

2 Αρχές λειτουργίας του Παλμογράφου

Ο παλμογράφος (oscilloscope) είναι ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία μελέτης και μέτρησης της εναλλασσόμενης και συνεχούς ηλεκτρικής τάσης και χρησιμοποιείται ευρύτατα σε πλήθος εφαρμογών της επιστήμης και της τεχνολογίας [8]. Συνήθως, χρησιμοποιείται για την απεικόνιση φαινομένων που μεταβάλλονται πολύ γρήγορα (εικόνα 1). Γενικά, εκτός από ηλεκτρική τάση, μπορεί να απεικονίσει και οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο που μπορεί να μετατραπεί σε τάση, όπως πίεση θερμοκρασία, ήχο, κ.λ.π., και να μετρήσει τη συχνότητα και την περίοδο οποιουδήποτε περιοδικού σήματος. Για παράδειγμα, αν στην είσοδο της συσκευής τοποθετηθεί μια απλή γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης (που μπορεί να αντιστοιχεί σε κάποιο απλό ακουστικό σήμα μιας συχνότητας), στην οθόνη του παλμογράφου θα εμφανιστεί μια τριγωνομετρική συνάρτηση αντίστοιχης περιόδου [10]. Η οθόνη ενός παλμογράφου είναι συνήθως χωρισμένη σε μικρά τετραγωνάκια τα οποία χρησιμοποιούνται για να γίνουν διάφορες απλές μετρήσεις (της περιόδου και του πλάτους του σήματος) από τον χειριστή (εικόνα 2), ο οποίος έχει τη δυνατότητα να

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

ρυθμίζει το εύρος της απεικόνισης. Η σωστή ρύθμιση της οθόνης του παλμογράφου είναι εξαιρετικά σημαντική για την ακρίβεια των μετρήσεων. Αν ο χρήστης επιλέξει σχετικά μεγάλο εύρος απεικόνισης, π.χ. 1 msec, τότε ένα σήμα περιόδου $T=1\mu\text{sec}$ θα φαίνεται εξαιρετικά πυκνό στην οθόνη (στην οποία θα εμφανίζονται 1000 περίοδοι του σήματος). Για να εμφανιστεί σωστά ένα τέτοιο σήμα, θα πρέπει το εύρος απεικόνισης να ρυθμιστεί κοντά στα 2 - 5 μsec ώστε στην οθόνη να εμφανίζονται 2 με 5 περίοδοι του σήματος [17].

Στα πλαίσια της δραστηριότητας που παρουσιάζεται σε αυτό το άρθρο, θεωρούμε ότι ο παλμογράφος συνδέεται με μια συσκευή παραγωγής απλών συχνοτήτων (Function Generator) και επομένως απεικονίζει απλές τριγωνομετρικές συναρτήσεις της μορφής:

$$f(t) = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

όπου T είναι η περίοδος του εισαγόμενου σήματος και t ο χρόνος. Σημειώνουμε ότι σε όλα τα πειράματα το πλάτος του σήματος παραμένει σταθερό επομένως το θεωρούμε ίσο με τη μονάδα.

3 Η τριγωνομετρία ως παράδειγμα δράσεων με περιεχομενο STEM

Ένα από τα κομμάτια του προγράμματος σπουδών της Άλγεβρας Β' Λυκείου, στο οποίο εμφανίζονται σε πολύ μεγάλο βαθμό προβλήματα σύνδεσης της ύλης με άλλα σχολικά μαθήματα του είναι η Τριγωνομετρία. Παρότι θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για να παρουσιαστούν εφαρμογές από πλήθος επιστημονικών πεδίων (γεωμετρία, τοπογραφία, φυσική, κυματική, πληροφορική, τεχνολογία, μουσική, κ.λ.π.), πολλές από τις οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα στη σύγχρονη κοινωνία (τηλεπικοινωνίες, συμπίεση εικόνας - πρότυπο JPEG, κ.λ.π.), συνήθως η διδασκαλία στο σχολείο περιορίζεται σε αποδείξεις τύπων και επίλυση εξισώσεων. Έτσι δύνεται η εντύπωση ότι η Τριγωνομετρία αποτελείται από ένα σύνολο διακριτών (και ασύνδετων με άλλα φαινόμενα) εννοιών και προτάσεων, οι οποίες εφαρμόζονται σε πολύ συγκεκριμένα και εστιασμένα προβλήματα και ασκήσεις. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές μαθαίνουν αποκλειστικά να επιλύουν συγκεκριμένους τύπους ασκήσεων, αγνοώντας την σύνδεση των εννοιών αυτών με άλλες μαθηματικές και φυσικές έννοιες.

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

Επιπλέον, οι περισσότεροι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα ακόμα και στο να συνδέσουν τη γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης με ένα περιοδικό φαινόμενο και τη συχνότητά του [12].

Με αφορμή τα προβλήματα αυτά, προτείνουμε μια διαθεματική ομαδοσυνεργατική δράση βασισμένη στις αρχές της μάθησης STEM για την διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στη Β' Λυκείου. Η δράση συνδυάζει έννοιες των μαθηματικών (τριγωνομετρική συνάρτηση) με βασικές έννοιες της φυσικής που διδάσκονται στο Λύκειο (κυματική - περίοδος - συχνότητα) μέσω ενός βασικού τεχνολογικού εργαλείου (παλμογράφος) που χρησιμοποιείται τόσο για ερευνητικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς. Βασικοί στόχοι της δραστηριότητας είναι: α) η σύνδεση των βασικών ιδιοτήτων της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\eta\mu(x)$ με τα περιοδικά φαινόμενα και ιδιαίτερα με έννοιες της περιόδου και της συχνότητας από την κυματική, β) η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες που έχουν σχέση με το χώρο εργασίας και συνθήκες πραγματικών προβλημάτων, γ) η εμπλοκή των μαθητών σε ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες βασισμένες στη μάθηση με διερώτηση. Τονίζουμε ότι το συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο δεν αναφέρεται στο σύνολο της διδασκαλίας της τριγωνομετρίας της Β' Λυκείου. Η προτεινόμενη δράση εστιάζεται σε μια δραστηριότητα που μπορεί να εφαρμοστεί μετά τη διδασκαλία των βασικών ιδιοτήτων της τριγωνομετρικής συνάρτησης. Το διδακτικό σενάριο (διάρκειας δύο ωρών) προτείνεται να υλοποιηθεί σε εργαστήριο Η/Υ εξοπλισμένο με το λογισμικό Geogebra (έκδοση 4.4 ή νεότερη). Τα φύλλα εργασίας, τα αρχεία Geogebra και όλο το συνοδευτικό υλικό μπορούν να βρεθούν στον σύνδεσμο bouboulis.mysch.gr/edu.html.

Το σενάριο περιλαμβάνει συνολικά 5 δραστηριότητες. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες των 3-4 ατόμων και η κάθε μια αναλαμβάνει να αντιμετωπίσει, με όποιο τόπο θεωρεί καλύτερο, κάθε δραστηριότητα ξεχωριστά. Στη συνέχεια υπάρχει συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης σχετικά με τις λύσεις που προτείνει κάθε ομάδα και ανταλλαγή απόψεων. Πριν την έναρξη του σεναρίου, προτείνεται ο καθηγητής να παρουσιάσει/υπενθυμίσει στους μαθητές τα βασικότερα σημεία της θεωρίας από την κυματική καθώς επίσης και τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στη σχέση της περιόδου με τη γραφική παράσταση. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \eta\mu(2\pi \cdot f \cdot t), \text{ η οποία έχει περίοδο ίση με } T, \text{ ή}$$

ισοδύναμα αντιστοιχεί σε φαινόμενα συχνότητας f . Προτείνεται επίσης να τονιστεί ότι σε αυτή την περίπτωση τα σημεία τομής με τον άξονα των x δεν θα είναι πολλαπλάσια του π , αλλά πολλαπλάσια/υποπολλαπλάσια της μονάδας. Τέλος, πριν την εμπλοκή των μαθητών στις δραστηριότητες του σεναρίου θα ήταν καλό να τονιστεί η σχέση των ακουστικών κυμάτων με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι μαθητές θα μπορούσαν να ακούσουν ένα ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένων συχνοτήτων και να συσχετίσουν το άκουσμα με την αντίστοιχη γραφική παράσταση (βιωματική μάθηση).

3.1 Δραστηριότητες Εξοικείωσης με τη λειτουργία του Παλμογράφου

Οι πρώτες δύο δραστηριότητες είναι σχεδιασμένες ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με τη λειτουργία του παλμογράφου και της γεννήτριας παραγωγής ημιτονοειδών συναρτήσεων. Οι μαθητές καλούνται να ανοίξουν το πρώτο .ggb αρχείο και να κάνουν ρυθμίσεις τόσο στη γεννήτρια όσο και στην οθόνη του παλμογράφου. Η συχνότητα των παραγόμενων συχνοτήτων ελέγχεται περιστρέφοντας τον ρυθμιστή στο κέντρο της γεννήτριας. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε οποιοδήποτε ημιτονοειδές σήμα συχνότητας από 0.2 έως 2.0 KHz. Σε περίπτωση που θέλουμε να παράγουμε σήματα μεγαλύτερης ή χαμηλότερης συχνότητας, μπορούμε να αλλάξουμε την κλίμακα στο άνω μέρος της γεννήτριας. Για παράδειγμα, πληκτρολογώντας την τιμή 10, το εύρος παραγόμενων συχνοτήτων γίνεται 2 έως 20 KHz, ενώ πληκτρολογώντας την τιμή 0.01, το εύρος γίνεται 2 έως 20 Hz. Κάτω από τη γεννήτρια αναφέρεται η συχνότητα και η περίοδος της παραγόμενης κυματομορφής.

Ανάλογα με την παραγόμενη συχνότητα, στην οθόνη του παλμογράφου (δεξιά) φαίνεται η αντίστοιχη ημιτονοειδής συνάρτηση. Για διευκόλυνση των μαθητών, στο κάτω μέρος του παλμογράφου αναφέρεται επίσης ο αναλυτικός τύπος της παραγόμενης συνάρτησης. Όπως φαίνεται στην εικόνα 3, η οθόνη του παλμογράφου είναι χωρισμένη σε μικρά τετράγωνα, κάτι το οποίο συμβαίνει και στους πραγματικούς παλμογράφους. Με τη βοήθεια αυτών των τετραγώνων (παρατηρείστε ότι υπάρχουν 20 διαστήματα στον άξονα των x) και τη γνώση του εύρους

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

απεικόνισης μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της κυματομορφής που φαίνεται στην οθόνη του παλμογράφου. Για παράδειγμα στην εικόνα 3, παρατηρούμε ότι σε εύρος 5 msec υπάρχουν 4 περίοδοι της κυματομορφής. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η περίοδος του αντίστοιχου σήματος θα είναι $T = 5/4 = 1.25$ msec. Αν ο χρήστης μεγαλώσει δραματικά την συχνότητα του εισαγόμενου σήματος θέτοντάς την για παράδειγμα ίση με $f = 80$ KHz, τότε θα πρέπει επίσης να αλλάξει και το εύρος της οθόνης του παλμογράφου, αφού αν το εύρος παραμείνει ίσο με 5 msec θα απεικονίζονται 400 περίοδοι του σήματος. Σε αυτή την περίπτωση, το εύρος της οθόνης απεικόνισης θα πρέπει να μικρύνει σημαντικά ώστε να μπορεί να απεικονιστεί καθαρά η νέα κυματομορφή. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω του μπλε δρομέα κάτω από την οθόνη του παλμογράφου.

Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με αυτές τις λειτουργίες, η δραστηριότητα 2 τους εμπλέκει σε διάφορα εύκολα πειράματα ρυθμίσεων της γεννήτριας και του παλμογράφου. Κάθε ομάδα καλείται να συζητήσει και να υλοποιήσει σωστά τις ρυθμίσεις. Στη συνέχεια συζητούνται τα αποτελέσματα και τα προβλήματα που αντιμετώπισε κάθε ομάδα στην ολομέλεια του τμήματος. Οι επιμέρους ερωτήσεις της δραστηριότητας 2, φαίνονται στον πίνακα 1.

3.2 Συνδέοντας γραφική παράσταση και συχνότητα

Οι υπόλοιπες δραστηριότητες περιγράφουν τρία πειράματα στα οποία κάποιες από τις λειτουργίες είναι απενεργοποιημένες. Οι μαθητές καλούνται να συζητήσουν για τα πειράματα αυτά και να βρουν τον καλύτερο τρόπο να απαντήσουν σε κάποιες σχετικές ερωτήσεις. Αν καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα μπορούν να εισάγουν την απάντησή τους στο αντίστοιχο αρχείο Geogebra και να δουν αν είναι Σωστή ή λανθασμένη.

Η δραστηριότητα 3, περιγράφει ένα πείραμα στο οποίο οι ενδείξεις της γεννήτριας συχνοτήτων είναι απενεργοποιημένες (εικόνα 4). Οι μαθητές καλούνται βλέποντας την οθόνη του παλμογράφου, να υπολογίσουν την συχνότητα του παραγόμενου σήματος και τη μορφή της αντίστοιχης ημιτονοειδούς συνάρτησης. Στη συνέχεια πληκτρολογούν την απάντησή τους στο αντίστοιχο πεδίο και βλέπουν αν είναι σωστή ή λανθασμένη από την αντίστοιχη ένδειξη. Εδώ αναμένονται κατά βάση δύο προσεγγίσεις από τις ομάδες των μαθητών. Κάποιες ομάδες μπορεί να

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

σκεφτούν να χρησιμοποιήσουν το πλήρες αρχείο της δραστηριότητας 1 και να ρυθμίσουν τη γεννήτρια του παραγόμενου σήματος μέχρι να δουν την ίδια εικόνα στον παλμογράφο. Κάποιοι άλλοι (ίσως πιο "ορθόδοξα" σκεπτόμενοι) θα σκεφτούν να μετρήσουν την περίοδο του σήματος από τα τετραγωνάκια της οθόνης του. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, βλέπουμε ότι στην οθόνη του παλμογράφου εμφανίζονται 6 περίοδοι του σήματος.

Επομένως η περίοδος του εισερχόμενου σήματος είναι ίση με $\frac{5}{6} \approx 0.83$

msec, ενώ η συχνότητα είναι $\frac{6}{5} = 1.2$ KHz. Είναι πάντως σημαντικό και

οι δύο κατηγορίες μαθητών να κατανοήσουν τη σχέση περιόδου - συχνότητας με την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Οι επόμενες δύο δραστηριότητες περιγράφουν παρόμοια πειράματα. Στη δραστηριότητα 4 (εικόνα 5) το εύρος της οθόνης του παλμογράφου είναι κρυφό. Οι μαθητές καλούνται μελετώντας το πείραμα να υπολογίσουν αυτό το εύρος σε msec. Δύο είναι τα σημεία που πρέπει να προσέξουν. Πρώτον ότι η γεννήτρια συχνοτήτων έχει κλίμακα $\times 100$ και δεύτερον ότι πρέπει να κάνουν τις απαραίτητες μετατροπές ώστε να καταλήξουν σε msec και όχι σε msec. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι η συχνότητα του παραγόμενου σήματος είναι 80.17 KHz. Επομένως η περίοδος θα είναι ≈ 0.0125 msec. Επιπλέον, μελετώντας την οθόνη του παλμογράφου παρατηρούμε ότι περιέχει 4 περιόδους. Επομένως συμπεραίνουμε ότι το εύρος της οθόνης του θα είναι ίσο με $4 \times 0.0125 = 0.05 \text{ msec} = 50 \mu\text{sec}$. Αντίστοιχα, στη δραστηριότητα 5 (εικόνα 6) η κλίμακα της γεννήτριας συχνοτήτων είναι κρυφή. Οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν το πείραμα και να υπολογίσουν την κλίμακα αυτή. Από την εικόνα του παλμογράφου μπορεί να δει κανείς ότι η περίοδος του σήματος είναι 5 msec, άρα η συχνότητα είναι 0.2 MHz. Επειδή όμως η ένδειξη της γεννήτριας συχνοτήτων είναι 0.4, συμπεραίνουμε ότι η κλίμακα θα είναι ίση με 500, αφού $500 \times 0.4 = 200 \text{ KHz} = 0.2 \text{ MHz}$.

4 Επέκταση του Σεναρίου

Με αφορμή το προτεινόμενο σενάριο δραστηριοτήτων, μπορούν να προκύψουν ενδιαφέρουσες σχετικές συζητήσεις και να παρουσιαστούν

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

σημαντικές εφαρμογές της τριγωνομετρίας σε άλλα επιστημονικά πεδία. Ως παράδειγμα αναφέρουμε το διακρότημα, το οποίο διδάσκεται στη Φυσική της Γ' Λυκείου, την ανάλυση Fourier και το πρότυπο συμπίεσης εικόνων JPEG που κυριαρχεί εδώ και αρκετά χρόνια.

Το διακρότημα προκύπτει ως αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο κυμάτων περίπου ίσης συχνότητας. Αν για παράδειγμα συνδέσουμε δύο διαφορετικές γεννήτριες συχνοτήτων στον ίδιο παλμογράφο και τις ρυθμίσουμε έτσι ώστε να έχουν περίπου την ίδια συχνότητα (με πολύ μικρή απόκλιση) τότε στην οθόνη του παλμογράφου παίρνουμε ένα σχήμα σαν αυτό της εικόνας 7. Το αντίστοιχο αρχείο που έχουμε υλοποιήσει σε Geogebra επιτρέπει στους μαθητές να μελετήσουν το φαινόμενο του διακροτήματος ρυθμίζοντας μόνοι τους τις γεννήτριες και τον αντίστοιχο παλμογράφο. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ακούσουν το διακρότημα μέσω της ειδικής παρουσίασης.

Η ανάλυση Fourier είναι από τις σημαντικότερες εφαρμογές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε πρακτικές τεχνολογικές εφαρμογές. Βασίζεται σε αρκετά προχωρημένα για το σχολείο θεωρία και εμπλέκει μιγαδική ανάλυση και θεωρία προσεγγίσεων. Παρόλα αυτά μπορούν να αναφερθούν μερικά απλά αποτελέσματα της θεωρίας του Joseph Fourier, όπως για παράδειγμα το ότι "πολύπλοκες συναρτήσεις που πληρούν ορισμένες προϋποθέσεις μπορεί να αναλυθούν ως άθροισμα απλούστερων τριγωνομετρικών συναρτήσεων". Μπορούν έτσι οι μαθητές (μέσω κατάλληλων απλών παραδειγμάτων) να κατανοήσουν ότι πολύπλοκες γραφικές παραστάσεις (όπως π.χ. ένα σύνθετο σήμα ήχου) μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα πολλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω κατάλληλων αλγορίθμων (εικόνα 8). Επιπλέον, μπορεί να γίνει αναφορά σε εφαρμογές της θεωρίας στην αφαίρεση θορύβου (εικόνα 9), μέσω της αφαίρεσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που ευθύνονται για το θόρυβο, και στην συμπίεση εικόνων (JPEG) μέσω της αποθήκευσης μόνο των πιο "σημαντικών" τριγωνομετρικών συναρτήσεων (εικόνα 10).

5 Συμπεράσματα

Παρουσιάσαμε μια διαθεματική ομαδοσυνεργατική δραστηριότητα, βασισμένη στις αρχές της μάθησης με διερεύνηση και χρήση τεχνολογιών πληροφορικής, για τη διδασκαλία των βασικών ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η δραστηριότητα ακολουθεί της αρχές της μάθησης STEM και βασίζεται σε ένα σημαντικό τεχνολογικό εργαλείο με ευρύτατες εφαρμογές (τον παλμογράφο). Επιπλέον παρουσιάστηκαν τομείς όπου η έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην επιστήμη και το χώρο εργασίας με

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

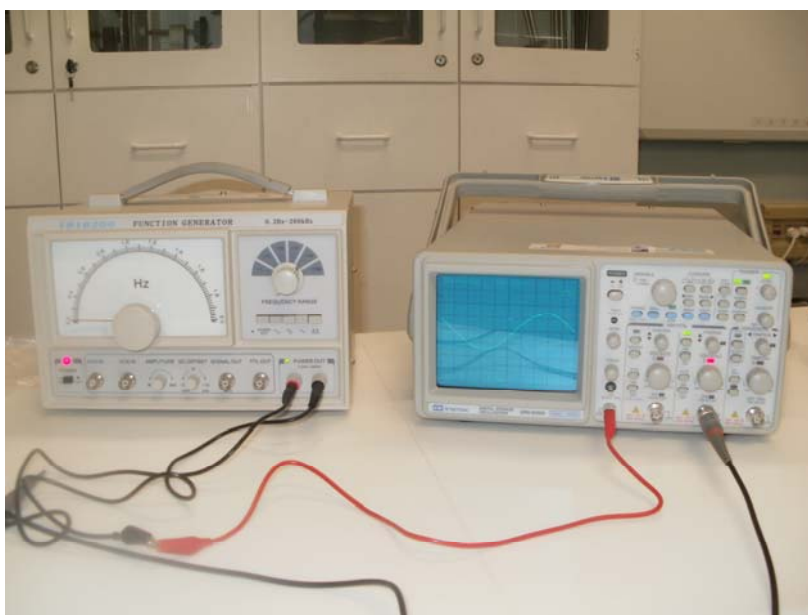
σκοπό την διασύνδεση των μαθηματικών του σχολείου με πραγματικές εφαρμογές και την απόδοση κινήτρων στους μαθητές.

1 Βιβλιογραφία

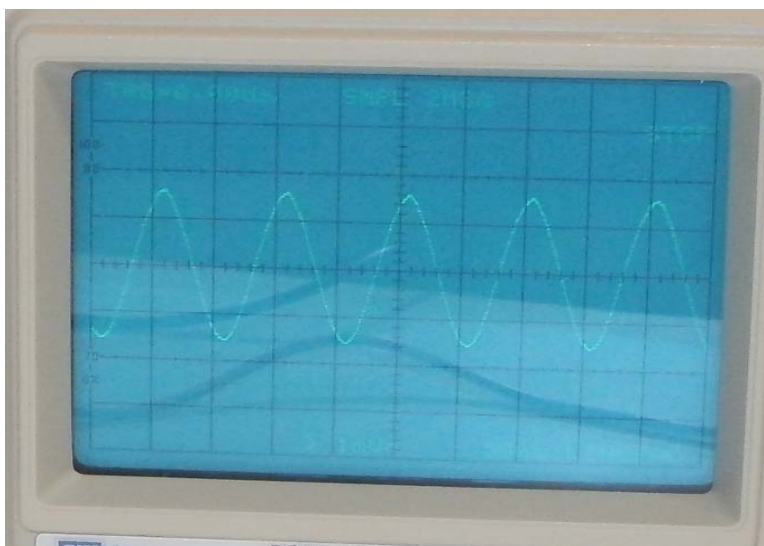
- [1] Arcavi A, The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, vol 52, 2003, 215-241.
- [2] Chin K. E., Tall D., Making Sense of mathematics through perception, operation and reason: The case of Trigonometric functions, *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Taipei, 2012.
- [3] Chazan D, Yerusalmi M, On appreciating the cognitive complexity of school Algebra: Research on Algebra learning and directions of curricular change, In J. Kilpatrick, D. Schifter, and G. Martin., *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, 2003, pp. 123-135 NCTM, Reston, Virginia.
- [4] Hestenes D, Remodeling Science Education, *European Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 1(1), 2013, 13-22.
- [5] Kissane B., Kemp M., *Teaching and Learning Trigonometry with Technology*, ATCM 2014.
- [6] Kocijancic S, O'Sullivan C., Integrating Virtual and True Laboratory in Science and Technology Education, *32nd ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference*, 2002.
- [7] Moore K. C., Trigonometry, Technology and didactic objects, *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2009.
- [8] National STEM Center, Physics Demonstration Films, www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/collection/491/physics-demonstration-films
- [9] NCTM, Principles and Standards for School Mathematics, 2000.
- [10] Nuffield Foundation, Using an Oscilloscope, <http://www.nuffieldfoundation.org/practical-physics/using-oscilloscope>
- [11] Ross J., Bruce C. D., Sibbald T. M., Sequencing computer-assisted learning of transformations of trigonometric functions, *Teaching Mathematics and Its Applications*, vol. 30, 2011, 120 - 137.
- [12] Stacey K, Chick H, Kendal M, The future of the Teaching and learning of Algebra, International Commission on Mathematical Instruction, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [13] Stacey, K., Accessing results from research on technology in mathematics education, *Australian Senior Mathematics Journal*, 19 (1), 2005, 8 – 15.

- [14] Tall D. O., Thomas M., Davis G., Gray E. Simpson A., What is the object of the encapsulation of a process?, *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 18(2), 2000, 1 – 19.
- [15] Weber, K., Students' Understanding of Trigonometric Functions, *Mathematics Education Research Journal 2005*, Vol. 17, No. 3, 2005, 91–112.
- [16] Weber K., How to teach the trigonometric functions, *Mathematics Teacher* vol. 102(2), 2008, 144 – 150.
- [17] Wei P, The Improvement of Experimental Teaching Method of “The Use of Oscilloscopes”, *International Conference on Education Technology and Management Science (ICETMS 2013)*.
- [18] Zengin Y., Furkan H., Kutluca T., The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 31, 2012, 183 – 187.

STEM Β' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

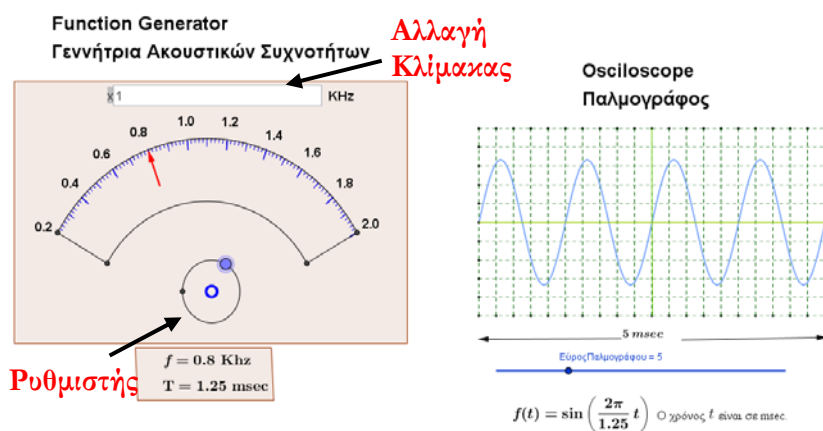


Εικόνα 1. Παλμογράφος συνδεδεμένος με μια γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης.



Εικόνα 2. Η οθόνη του παλμογράφου είναι χωρισμένη σε μικρά τετράγωνα.

STEM Β' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

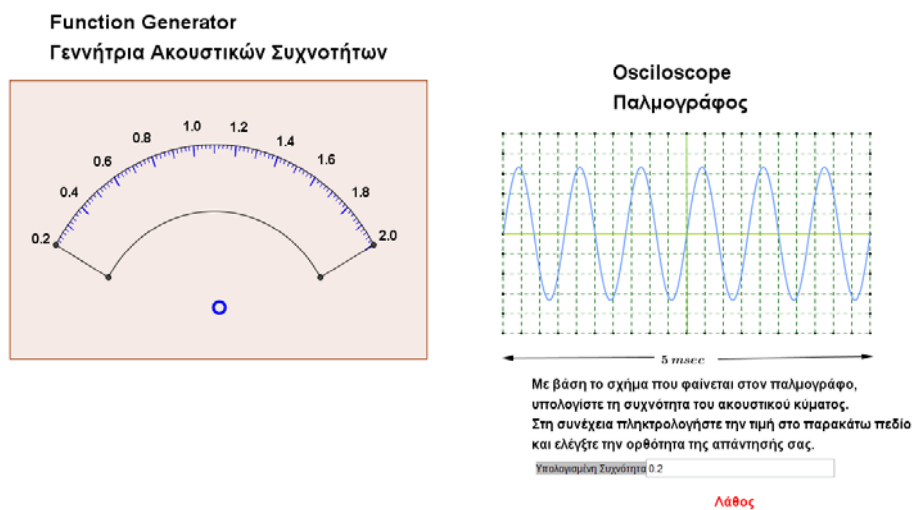


Εικόνα 3. Προσομοίωση του παλμογράφου μέσω του λογισμικού Geogebra. Αριστερά φαίνεται η γεννήτρια παραγωγής συχνοτήτων και δεξιά η οθόνη του παλμογράφου.

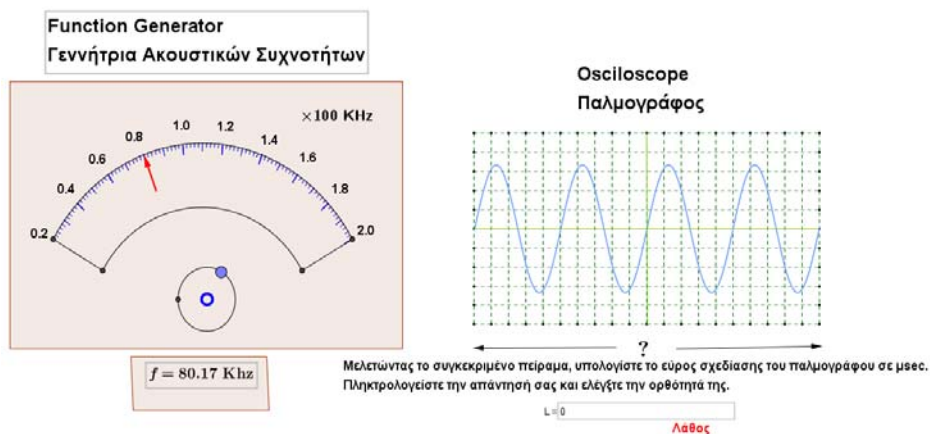
- A.** Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 0.4 KHz.
- Μετρήσετε την περίοδο του σήματος όπως αυτό φαίνεται στον παλμογράφο.
 - Υπολογίστε τη συχνότητα του σήματος που δείχνει η εικόνα του παλμογράφου.
 - Ποιός είναι ο τύπος της ημιτονοειδούς συνάρτησης που έχει την ίδια περίοδο με αυτή που φαίνεται στον παλμογράφο;
- B.** Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1 KHz. Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα
- Γ.** Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1.5 KHz. Επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.
- Δ.** Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 5 KHz. Ρυθμίστε τον παλμογράφο ώστε να φαίνεται καλά η κυματομορφή και επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.
- Ε.** Ρυθμίστε την γεννήτρια παραγωγής ακουστικών συχνοτήτων ώστε να παράγει ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 0.08 KHz. Ρυθμίστε τον παλμογράφο ώστε να φαίνεται καλά η κυματομορφή και επαναλάβετε τα προηγούμενα βήματα.

Πίνακας 1. Τα επιμέρους θέματα της δραστηριότητας 2.

STEM B' - Διδάσκοντας Τριγωνομετρία με χρήση Παλμογράφου

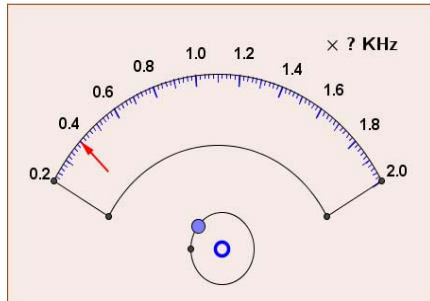


Εικόνα 4. Η δραστηριότητα 3. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν σε δύο ερωτήσεις: **A.** Να βρουν την παραγόμενη συχνότητα (σε KHz) και **B.** Να βρουν τη μορφή της ημιτονοειδούς συνάρτησης που φαίνεται στην οθόνη του παλμογράφου (όπου ο χρόνος είναι σε msec).

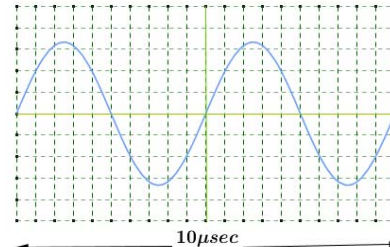


Εικόνα 5. Η δραστηριότητα 4. Εδώ το εύρος της οθόνης του παλμογράφου είναι κρυφό. Οι μαθητές πρέπει να μελετήσουν το πείραμα και να υπολογίσουν το εύρος σχεδίασης του παλμογράφου σε μsec .

Function Generator
Γεννήτρια Ακουστικών Συχνοτήτων



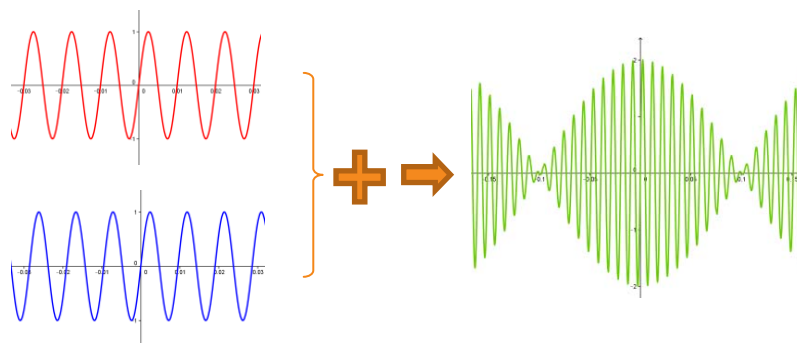
Oscilloscope
Παλμογράφος



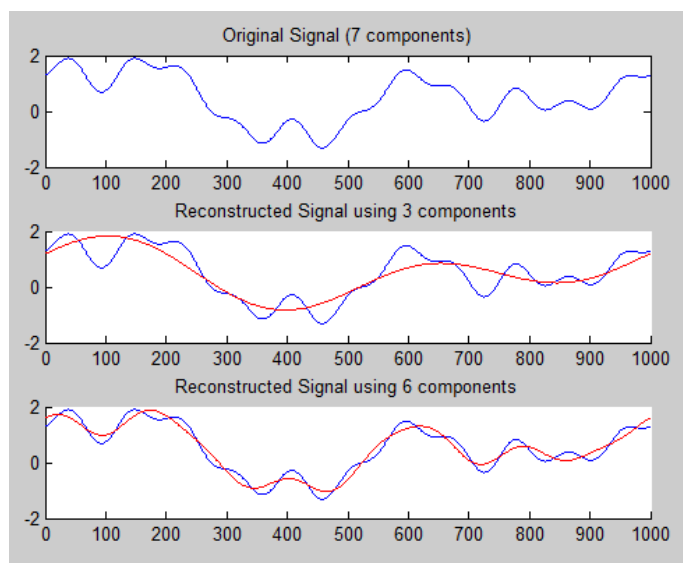
Μελετώντας το συγκεκριμένο πείραμα, υπολογίστε την κλίμακα της γεννήτριας. Πληκτρολογήστε την απάντησή σας και ελέγξτε την ορθότητά της.

Κλίμακα = Λάθος

Εικόνα 6. Η δραστηριότητα 5. Οι μαθητές καλούνται να βρουν την κλίμακα της γεννήτριας.



Εικόνα 7. Αν δύο κύματα περίπου ίδια συχνότητας συνδυαστούν μας δίνουν το λεγόμενο διακρότημα.



Εικόνα 8. Η αρχική γραφική παράσταση προκύπτει ως άθροισμα 7 διαφορετικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ενώ οι δύο προσπάθειες ανακατασκευής χρησιμοποιούν 3 από τις 7 και 6 από τις 7 τριγωνομετρικές συναρτήσεις αντίστοιχα.



Εικόνα 9. Αφαίρεση θορύβου μέσω της διαγραφής των λιγότερο σημαντικών συντελεστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων Fourier.

Αρχική Εικόνα (2.4 Mb)



Συμπίεση JPEG (151 Kb)



Συμπίεση JPEG (47 Kb)



Συμπίεση JPEG (32 Kb)



Εικόνα 9. Συμπίεση μέσω του προτύπου JPEG. Όσο λιγότερες τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούμε, τόσο λιγότερο χώρο χρειαζόμαστε για την αποθήκευση της εικόνας, αλλά μειώνεται η ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας.