

## ***Επανεξετάζοντας την Κινηματική με το Λογισμικό Geogebra: Ο Αρχικός Σχεδιασμός***

**Δρ. Γεώργιος Πολυζώης**  
Φυσικός, Ζάννειο Πειραματικό Λύκειο  
gpolizois@edc.uoc.gr

**Δρ. Παντελής Μπουμπούλης**  
Μαθηματικός, Πληροφορικός, Ζάννειο Πειραματικό Λύκειο  
panbouboulis@gmail.com

### **Περίληψη**

Η εργασία περιγράφει την αξιοποίηση του λογισμικού GEOGEBRA στη λύση προβλημάτων κινηματικής. Με τη βοήθεια του λογισμικού παράγονται πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις (Multiple External Representation – MER) και με τη βοήθεια εργαλείων δράσης σε αυτές λύνονται προβλήματα της κινηματικής. Η όλη προσπάθεια είναι δυνατόν να ενταχθεί στο πλαίσιο STEM και να αποτελέσει έναν καινοτόμο και γόνιμο τρόπο προσέγγισης του εικονικού εργαστηρίου Φυσικής.

**Λέξεις κλειδιά:** κινηματική, λύση προβλήματος, πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις (MER), Geogebra, STEM.

### **Εισαγωγή**

Η αξιοποίηση των ΤΠΕ στις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά συνοδεύεται από μια ευρεία βιβλιογραφική υποστήριξη (Harter, 1991· Laws, 1991· Redish & Wilson, 1993· Mc Dermott, 1987), η οποία αναφέρεται στην εκπαιδευτική τους αξία και τη μαθησιακή τους αποτελεσματικότητα. Παρόλη την ευρύτητα των ερευνητικών δεδομένων, εργασίες μετα-ανάλυσης των ερευνών και ντοκουμέντα ανασκόπησης δεν υποστηρίζουν με σαφήνεια ότι οι προσομοιώσεις αποτελούν ένα αναντικατάστατο εργαλείο, το οποίο διευκολύνει και αυξάνει την κατανόηση στις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά (Schacter, 1999· Osborne & Hennessy, 2003).

Στις ερωτήσεις του Turkle το 1997 (όπως αναφέρεται από τους Finkelstein, Adams, Kelle, Kohl, Perkins, Podolefsky, & LeMaster, 2005): «Γιατί δεκαεξάχρονοι πρέπει να τοποθετούν εικονικές χημικές ενώσεις σε εικονικά ποτήρια; Γιατί δεκαοκτάχρονοι πρέπει να εκτελούν εικονικά εργαστήρια στο εργαστήριο φυσικών επιστημών;» οι συχνές απαντήσεις είναι γιατί οι προσομοιώσεις κοστίζουν λιγότερα χρήματα, γιατί δεν υπάρχουν πολλοί καθηγητές φυσικών επιστημών κ.ά. Αλλά αυτές οι απαντήσεις προκαλούν με επίταση ένα άλλο ερώτημα: «Μήπως αξιοποιούμε την τεχνολογία των υπολογιστών όχι γιατί διδάσκει καλύτερα, αλλά γιατί έχουμε χάσει την πολιτική βούληση να χρηματοδοτήσουμε την εκπαίδευση επαρκώς;».

Με αυτόν τον χαρακτηριστικό τρόπο τίθεται, εκτός των άλλων, το πρόβλημα της βελτίωσης των εκπαιδευτικών κυρίως όψεων της χρήσης των προσομοιώσεων και των υπολογιστών γενικότερα. Η σκεπτικιστική στάση για την αξιοποίηση των προσομοιώσεων εκφράζεται και από την θεατρική ερώτηση του Steinberg (2000): “To stimulate or not to stimulate?”

Η παρούσα εργασία υιοθετεί την απάντηση των Finkelstein et all (2005): «Ναι, αν οι προσομοιώσεις είναι κατάλληλα σχεδιασμένες και εφαρμόζονται στο κατάλληλο εκπαιδευτικό πλαίσιο».

### **Στόχος της εργασίας**

Τελικός ερευνητικός στόχος των συγγραφέων είναι η εξέταση της αποτελεσματικότητας της προσέγγισης της κινηματικής του Λυκείου, όπου η αλγεβρική προσέγγιση της λύσης των προβλημάτων (δηλαδή η λύση με εφαρμογή των εξισώσεων των κινήσεων), που είναι επικρατούσα στην τωρινή εκπαιδευτική πραγματικότητα, έχει αντικατασταθεί με προσομοιώσεις

κινήσεων και παραγωγή πινάκων και γραφικών παραστάσεων. Ο Πολυζώης (2002, 2014) έχει επιχειρήσει τον στόχο αυτό, με ενθαρρυντικά αποτελέσματα, σε μικρό αριθμό μαθητών, αξιοποιώντας το λογισμικό ΠΟΛΑΠΛΑΝ. Το λογισμικό ΠΟΛΑΠΛΑΝ παρείχε ένα ημιδομημένο περιβάλλον μάθησης, στο οποίο οι μαθητές μπορούσαν να χειριστούν έναν περιορισμένο αριθμό παραμέτρων. Η διεπαφή του λογισμικού παρουσίαζε τεχνολογικούς περιορισμούς, δεδομένου ότι σε κάποιες περιπτώσεις αδυνατούσε να διερευνήσει το πρόβλημα της κινηματικής που ετίθετο. Επίσης, τα γραφικά του λογισμικού είχαν φτάσει στην ημερομηνία λήξης τους, με αποτέλεσμα να μην είναι συμβατά με τις σύγχρονες εκδοχές των λειτουργικών συστημάτων.

Για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων και την υλοποίηση του σκοπού της εργασίας προκρίθηκε η επιλογή του ανοικτού δυναμικού λογισμικού Geogebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν το θεωρητικό πλαίσιο και ο αρχικός σχεδιασμός των προσομοιώσεων της κινηματικής με το λογισμικό Geogebra.

### Θεωρητικό πλαίσιο

Το περιεχόμενο της κινηματικής του Λυκείου έχει αποτελέσει ιστορικό πεδίο διασύνδεσης της Φυσικής (φαινόμενο της κίνησης) με τα Μαθηματικά (Διαφορικός Λογισμός - Calculus) (Etkina, & Van Heuvelen, 2007). Η διασύνδεση αυτή μπορεί να αποβεί διδακτικά ωφέλιμη, αλλά δεν αποτελεί πεδίο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Το θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας στηρίζεται στην αξιοποίηση των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων των εννοιών που εισάγει η επιστήμη για τη μελέτη του φαινομένου της κίνησης. Οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις (Multiple External Representation – MER) του φαινομένου της κίνησης αποτελούν προνομιακό πεδίο μελέτης της διδακτικής των Φυσικών Επιστημών (Polizois & Valanides, 2010) και του νεοαναδυόμενου πεδίου του οπτικού γραμματισμού (Gilbert, Reiner, & Nakhleh, 2007).

Ερευνες στη διδακτική των Φυσικών Επιστημών (Meltzer, 2005), αλλά και ανάλογες στη διδακτική των Μαθηματικών (Taşar, 2010) έχουν καταγράψει δυσκολίες των μαθητών στην αξιοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Μεταξύ άλλων δυσκολίες έχουν καταγραφεί κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων κινηματικής (Beichner, 1994· Berg & Smith, 1994· Testa, Monroy, & Sassi, 2002). Γενικά, λύση προβλημάτων για τους μαθητές σημαίνει υπολογισμός ενός η περισσοτέρων αγνώστων. Για την επίλυση προβλημάτων αξιοποιούν μονοδιάστατα τον φορμαλισμό (αλγεβρικούς τύπους) (Clement, 1985) και αποφεύγουν οποιαδήποτε ποιοτική / προσεγγιστική εξήγηση ή χρήση αναπαραστάσεων (Mc Dermott, 1993). Η αξιοποίηση του μαθηματικού φορμαλισμού εμφανίζει το “παράδοξο” οι μαθητές να αναπτύσσουν μια διαισθητική ή αλγοριθμική προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων, με τη βοήθεια βεβαίως της απομνημόνευσης. Η προσέγγιση αυτή αποτυγχάνει όταν έχουν να αντιμετωπίσουν μια νέα κατάσταση που περιγράφει ένα πρόβλημα το οποίο δεν έχουν συναντήσει στο παρελθόν ή όταν το πρόβλημα που τίθεται απαιτεί εννοιολογική κατανόηση (Mc Demortt, 1993).

Η δυνατότητα μετάφρασης των πληροφοριών από μία αναπαράσταση σε μία άλλη είναι “ζωτικής” σημασίας για την κατανόηση στις φυσικές επιστήμες (Ainsworth, 2008). Η απόκτηση αυτής της ικανότητας, καθώς και η δυνατότητα να κατανοούνται όλες οι πληροφορίες που περιέχονται σε μια στατική ή δυναμική αναπαράσταση, σχετίζονται με τον οπτικό εγγραμματισμό (visual learning) των μαθητών (Gilbert, 2007).

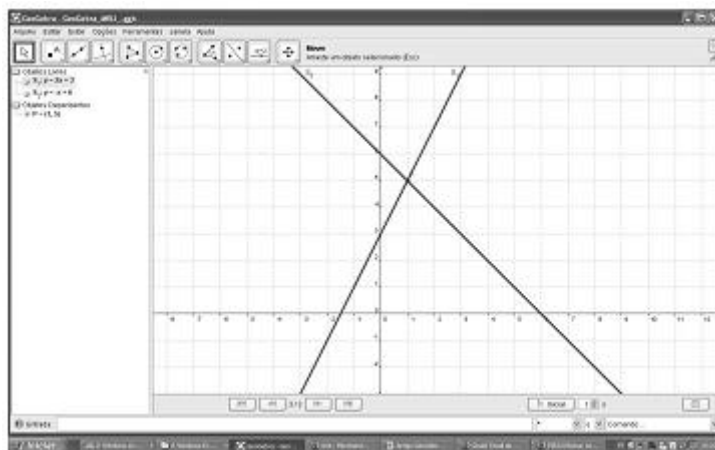
Η κατασκευή νοήματος με την αξιοποίηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων των φυσικών επιστημών ορίζεται ως οπτικοποίηση (visualization) (Gilbert, 2007). Η οπτικοποίηση (visualization) συνδέεται και με εσωτερικές αναπαραστάσεις, νοητικές δηλαδή κατασκευές του μαθητή (Rapp, 2005), αλλά στην παρούσα εργασία δεν θα ασχοληθούμε με αυτόν τον τύπο οπτικοποίησης.

Η οπτικοποίηση συνδέεται ευθέως με εκείνη την πλευρά μάθησης των φυσικών επιστημών, που σχετίζεται με την ανάπτυξη και την εξέλιξη ποιοτικών και ποσοτικών μοντέλων. Η παραγωγή μοντέλων, η διαδικασία δηλαδή της μοντελοποίησης, συνιστά μία από τις κορυφαίες επιστημονικές δραστηριότητες. Επιδίωξη της οπτικοποίησης είναι να εμπλακούν οι μαθητές σε αυτήν την επιστημονική δραστηριότητα, χειριζόμενοι και διαπλέκοντας μεταξύ τους τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά μοντέλα (Gilbert, 2007). Οι μαθητές συνήθως δεν εμπλέκονται σε

διαδικασίες κατασκευής δικών τους μοντέλων, που να αξιοποιούν ή να οπτικοποιούν τις εξωτερικές αναπαραστάσεις των φυσικών επιστημών, καθώς η καθημερινή σχολική πρακτική εστιάζει κατά κύριο λόγο σε φορμαλιστικούς υπολογισμούς ή υπολογισμούς από γραφήματα ή πίνακες (Doorman & Gravemeijer, 2009). Ο συνήθης τρόπος της αξιοποίησης των αναπαραστάσεων με τη βοήθεια ενός λογισμικού (π.χ. Geogebra) περιλαμβάνει την κατασκευή αναπαραστάσεων, από το λογισμικό, των μαθηματικών σχέσεων στις οποίες έχουν καταλήξει οι μαθητές. Έστω, για παράδειγμα, το παρακάτω πρόβλημα της κινηματικής:

Δύο αυτοκίνητα ταξιδεύουν στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο και οι θέσεις τους μετρούνται από κοινή αρχή. Το πρώτο αυτοκίνητο ξεκινά από τη θέση 3m και κινείται με σταθερή ταχύτητα 2m/s. Το δεύτερο αυτοκίνητο ξεκινά από τη θέση 6m και κινείται (αντίθετα με το πρώτο) με ταχύτητα -1m/s. Σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν και σε ποια θέση;

Οι μαθητές καλούνται από τα δεδομένα του προβλήματος να καταλήξουν στις εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν τις θέσεις στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ( $x_1=3+2t$ ,  $x_2=6-t$ ), τις οποίες αναπαριστούν γραφικά με τη βοήθεια του λογισμικού. Το σχήμα 1 παρουσιάζει τη γραφική αναπαράσταση. Οι συντεταγμένες του σημείου τομής ( $t=1$ ,  $x=5$ ) αποτελούν και τη λύση του προβλήματος.



**Σχήμα 1ο:** Η οθόνη του λογισμικού Geogebra, που αναπαριστά τις εξισώσεις κίνησης των αυτοκινήτων

Αντίθετα, στην εργασία αυτή επιδιώκουμε να εμπλακούν οι μαθητές στην ερμηνεία και κατασκευή πολλαπλών αναπαραστάσεων. Η ιδέα περιλαμβάνει τη δυνατότητα να χειριστούν αναπαραστάσεις και νοήματα με την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών και να αναπτύξουν ολοκληρωμένα μοντέλα. Ο χειρισμός αυτός (οπτικοποίηση) ουσιαστικά περιγράφει: (α) τη μετατόπιση από το φυσικό μοντέλο (το αυτοκίνητο κινείται, τα φυσικά μεγέθη: θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση) στο μαθηματικό μοντέλο (πολλαπλές αναπαραστάσεις), (β) τον έλεγχο του μαθηματικού μοντέλου και ενδεχομένως (γ) τη δράση στις πολλαπλές αναπαραστάσεις του μοντέλου. Η δράση πάνω στις αναπαραστάσεις του μοντέλου γίνεται με εξειδικευμένα εργαλεία, όπως κλίση και εμβαδόν (Πολυζώης, 2014).

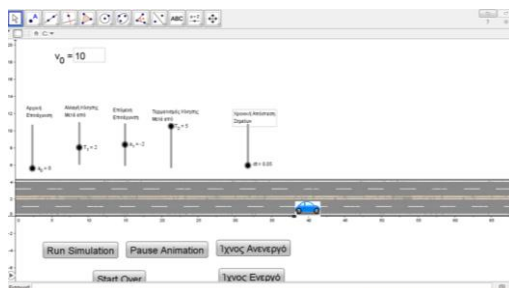
Η διαδικασία αυτή της εξέλιξης και της λύσης του κινηματικού προβλήματος παραλείπει τη φορμαλιστική (αλγεβρική) αναπαράσταση των μεγεθών, που αποτελεί και την κυριότερη μορφή δυσκολίας στα προβλήματα κινηματικής. Οι αλγεβρικές μέθοδοι, οι οποίες καταλήγουν σε αλγορίθμους (algorithmic formulas), δεν συμβάλλουν σε βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση ούτε ενεργοποιούν δεξιότητες σκέψης υψηλού επιπέδου (higher-level thinking skills) (Polizois & Valanides, 2010). Συγκεκριμένα, ο αλγεβρικός τρόπος αντιμετώπισης (όπου ορίζεται έστω  $x$  ο άγνωστος και αναζητούνται οι εξισώσεις κίνησης, π.χ. της μορφής  $x=u_0t-1/2at^2$ ) θεωρείται πολύ αφηρημένος για πολλούς μαθητές (Barb & Quinn, 1997).

Η προτεινόμενη προσέγγιση με τις πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις και τις δράσεις πάνω σε αυτές έχει αρκετές αναλογίες με τους δύο τύπους μετασχηματισμών που προτείνει ο Duvall (2006) για τη μάθηση στα μαθηματικά. Όταν ένας μαθητής λύνει μια εξίσωση ή κατασκευάζει μια γραφική παράσταση, τότε “μετασχηματίζει / επεξεργάζεται (treatment)” την αναπαράσταση. Όταν δρα πάνω σε μια αναπαράσταση με ένα “εργαλείο” (π.χ. κλίση ή εμβαδό) στοχεύοντας στην παραγωγή μιας άλλης αναπαράστασης, τότε πραγματοποιεί μια “μετατροπή (conversion)”. Για τη διδασκαλία και τη μάθηση στα μαθηματικά είναι πιο σημαντική η εξέταση των “μετατροπών”, γιατί ο μαθητής αναγκάζεται να κινητοποιήσει τους απαραίτητους μηχανισμούς για την κατανόηση της περίπτωσης.

## Το λογισμικό Geogebra

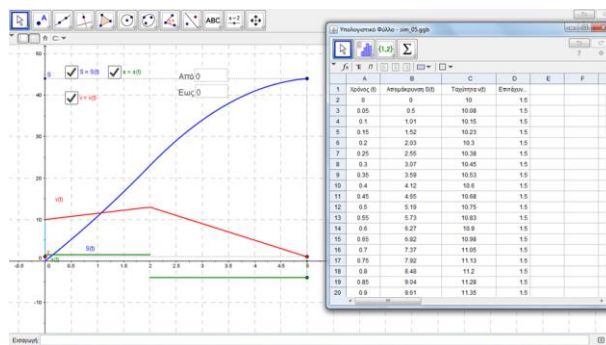
Το λογισμικό Geogebra αρχικά σχεδιάστηκε για τη διδασκαλία των μαθηματικών και συγκεκριμένα για την αξιοποίηση στοιχείων που διασυνδέουν την άλγεβρα με τη γεωμετρία. Σύμφωνα με τον κατασκευαστή του Markus Hohenwarter (Hohenwarter & Lavicza, 2009) η τελευταία έκδοση του λογισμικού προσφέρει δυναμική διασύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων (γραφικής, αλγεβρικής και αναπαράστασης με πίνακες/λογιστικά φύλλα) για τα “μαθηματικά αντικείμενα”. Πρόσφατα το λογισμικό άρχισε να αξιοποιείται και στη διδασκαλία της φυσικής. Έτσι, γύρω από το Geogebra “χτίστηκε” μια κοινότητα μάθησης όχι μόνον για τα μαθηματικά, αλλά γενικότερα για τη μοντελοποίηση υπηρεσιών, καθώς και για τη δημιουργία προσομοιώσεων ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)).

Στην παρούσα εργασία το λογισμικό Geogebra αξιοποιήθηκε με σκοπό να υλοποιηθεί το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε παραπάνω. Έτσι, στην οθόνη του υπολογιστή παρουσιάζεται ένα “κινητό”, το οποίο “προγραμματίζεται” να πραγματοποιήσει τις λειτουργίες που του επιβάλλει το πρόβλημα της κινηματικής (φυσικό μοντέλο, σχήμα 2<sup>ο</sup>).



Σχήμα 2<sup>ο</sup>: Το φυσικό μοντέλο στην οθόνη του Geogebra

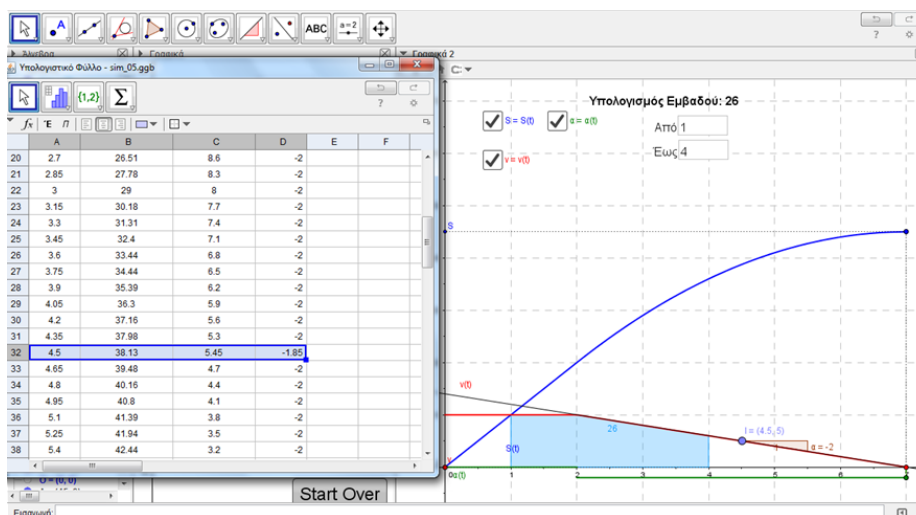
Ο μαθητής υλοποιεί τις απαιτήσεις του φυσικού μοντέλου προσεγγίζοντας τες με τη βοήθεια μεταβολών επιτάχυνσης και χρόνου ή ταχύτητας και χρόνου. Για κάθε επιλογή των μεταβολών το λογισμικό παρέχει τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις  $x-t$ ,  $u-t$ ,  $a-t$  και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών των μεγεθών  $x, u, a$  (μαθηματικό μοντέλο, σχήμα 3<sup>ο</sup>).



Σχήμα 3<sup>ο</sup>: Το μαθηματικό μοντέλο στην οθόνη του Geogebra

Από τη μορφή των πολλαπλών αυτών αναπαραστάσεων ο μαθητής κατανοεί αν το μοντέλο του ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος που έχει τεθεί. Αν όχι, προβαίνει σε υποθέσεις, εικασίες και αναστοχασμό για πιθανές νέες τιμές των μεταβολών και “ζαναχτίζει” το μοντέλο του έχοντας ο ίδιος τον έλεγχο. Ο ρόλος του διδάσκοντα είναι υποβοηθητικός όταν διαπιστώνει ότι η ομάδα ή ο μαθητής δουλεύουν “τυχαία” ή όταν η δυσκολία του προβλήματος επιβάλλει την παρέμβασή του.

Μετά την κατασκευή του ορθού μαθηματικού μοντέλου ο μαθητής “δρα” πάνω στις παραγόμενες αναπαραστάσεις, ώστε να υλοποιήσει τα ζητούμενα του προβλήματος ή να διασυνδέσει αναπαραστάσεις μεταξύ τους (σχήμα 4<sup>ο</sup>).



Σχήμα 4<sup>ο</sup>: Οι δράσεις με τα “εργαλεία” κλίση και εμβαδόν πάνω στην αναπαράσταση  $u - t$

Η “δράση” αυτή του μαθητή, με τα “εργαλεία” της κλίσης και του εμβαδού είναι δυνατόν να μην προσφέρει ακριβείς λύσεις, αλλά προσεγγιστικές, γιατί οι επιλογές των μεταβολών δεν έχουν τις επιθυμητές τιμές που απαιτεί το πρόβλημα. Τις περιπτώσεις αυτές ο εκπαιδευτικός μπορεί να τις εκμεταλλευτεί για να “εισαγάγει” τους μαθητές στη ‘φύση’ της επιστήμης.

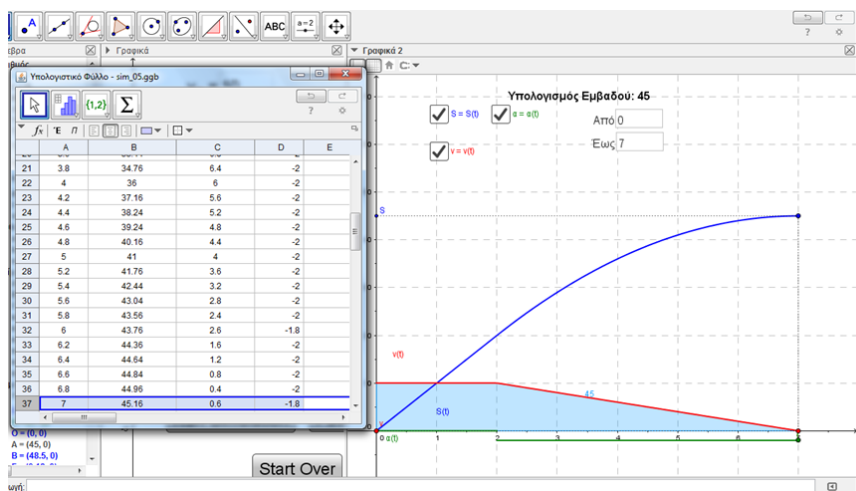
### Εφαρμογές στην κινηματική - Οπτικοποίηση

Πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπως πίνακες και γραφικές παραστάσεις θέσης – χρόνου, ταχύτητας – χρόνου, επιτάχυνσης – χρόνου, στην κινηματική μπορούν να αξιοποιηθούν για τη μελέτη της κίνησης (Doorman & Gravemeijer, 2009). Τα προβλήματα της κινηματικής μπορούν να θεωρηθούν και μοντέλα τα οποία με τη βοήθεια των αναπαραστάσεων των μεγεθών (θέσης – ταχύτητας – επιτάχυνσης) της κινηματικής μπορούν να τα χειριστούν και να τα εξελίσουν οι μαθητές.

Παρακάτω θα παραθέσουμε τη μοντελοποίηση ενός προβλήματος της κινηματικής σύμφωνα με τις θεωρητικές επιλογές της εργασίας και αξιοποιώντας το λογισμικό Geogebra με τον τρόπο που περιγράφηκε προηγουμένως.

Αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή ταχύτητα 36 km/h, όταν ο οδηγός αντιλαμβάνεται κάποιο εμπόδιο. Ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού είναι 2s. Η επιβράδυνση του αυτοκινήτου λόγω του φρεναρίσματος είναι 2 m/s<sup>2</sup>. Αν το εμπόδιο απείχε 50m από το αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο τρακάρισε ή όχι;

Στο σχήμα 5<sup>ο</sup> δίνεται η οθόνη της λύσης του προβλήματος με αξιοποίηση της γραφικής αναπαράστασης και της αναπαράστασης πινάκων.

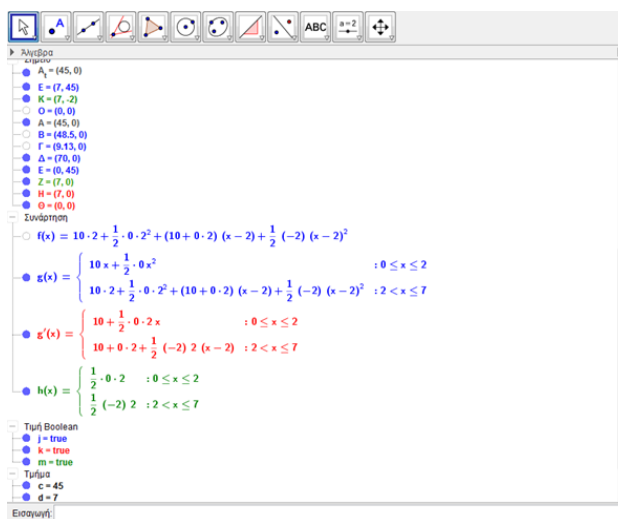


Σχήμα 5ο: Η οθόνη της λύσης του προβλήματος με αξιοποίηση της γραφικής αναπαράστασης και της αναπαράστασης πινάκων

### Επεκτάσεις

Στόχος των συγγραφέων είναι η προτεινόμενη προσέγγιση να επεκταθεί προς δύο κατευθύνσεις: α) την παραγωγή και άλλων προσομοιώσεων στην κινηματική (π.χ. προβλήματα με δύο κινητά) και β) τη συμπερίληψη στην προτεινόμενη προσέγγιση της αλγεβρικής αναπαράστασης.

Η δεύτερη κατεύθυνση είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί με αξιοποίηση του λογισμικού Geogebra μέσω της κατανόησης του υπολογιστικού αλγορίθμου της πραγμάτωσης της προσομοίωσης που μπορεί να εμφανιστεί στο παράθυρο της διεπαφής του λογισμικού (Υπολογιστικό μοντέλο).

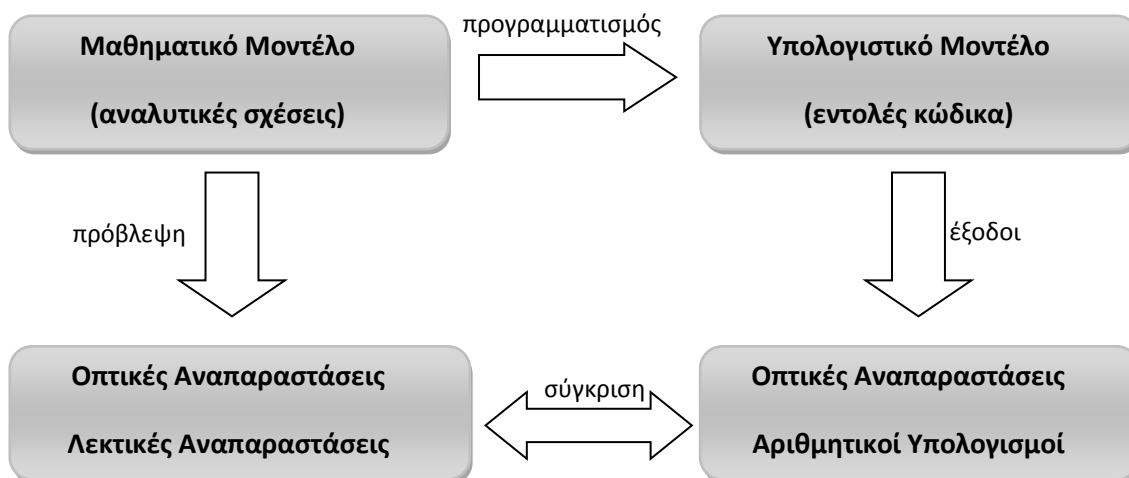


Σχήμα 6ο: Το υπολογιστικό μοντέλο

Η προτεινόμενη αντιστοίχιση αποτελεί μία γενική αρχή της υπολογιστικής επιστήμης, η οποία παριστάνεται στο σχήμα 7 (Buffer, Pillay, Lubben, & Fearick, 2008). Το σχήμα αυτό επιδιώκει να εμφανίσει την πρακτική πλευρά της αλγεβρικής αναπαράστασης με τη χρήση της στον κώδικα του λογισμικού.

Η δεύτερη αυτή επιδίωξη / κατεύθυνση της εργασίας εντάσσει την όλη διεξαγωγή της στο πλαίσιο του STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), μιας και προσφέρει μια

ολοκληρωμένη διαπλοκή της φυσικής, των μαθηματικών, της τεχνολογίας και της επιστήμης του μηχανικού.



Σχήμα 7. Η σχέση μαθηματικού και υπολογιστικού μοντέλου

### Συμπεράσματα και Υποδείξεις

Οι προσομοιώσεις που κατασκευάζονται με την προτεινόμενη μέθοδο, με αξιοποίηση των μεταβολών στο λογισμικό Geogebra, από λειτουργικής άποψης είναι δυναμικές και εύκολα τροποποιήσιμες ως προς τις παραμέτρους τους από τους μαθητές. Αυτή η λειτουργικότητα των παραγόμενων μοντέλων παρέχει και την ευελιξία για προσδιορισμό της λύσης προβλημάτων με διαδοχικές τροποποιήσεις τους.

Οι προσομοιώσεις στο λογισμικό Geogebra από διδακτικής άποψης δίνουν τη δυνατότητα για πολλαπλούς τρόπους λύσης ενός προβλήματος, πείθοντας τον μαθητή για τις δυνατότητες των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Με την προσέγγιση αυτή οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν σε δύσκολα αλγεβρικά ερωτήματα με έναν «επιστημολογικά» διαφορετικό τρόπο, που τους δίνει τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με αναπαραστάσεις που γι' αυτούς έχουν νόημα.

Η κατασκευή του περιβάλλοντος στο λογισμικό Geogebra απαιτεί την αξιολόγησή του σε συνθήκες πραγματικής τάξης. Παρόμοιες προσπάθειες με άλλο λογισμικό έδειξαν ελπιδοφόρα αποτελέσματα (Πολυζώης, 2014). Το περιβάλλον του λογισμικού απαιτεί αξιολόγηση για την αξιοποίησή του σε ομάδες ή μεμονωμένους μαθητές.

Άλλοι στόχοι της αξιοποίησης του περιβάλλοντος του λογισμικού είναι η περιγραφή του ρόλου και των ενεργειών του εκπαιδευτικού, καθώς και η ένταξη στο περιβάλλον του λογισμικού ποιοτικών ερμηνευτικών προσεγγίσεων που αξιοποιούν τη λεκτική αναπαράσταση μετατρέποντας την προτεινόμενη προσέγγιση STEM σε προσέγγιση ΦΥ.Τ.ΕΜ.ΜΑ.Γ (Φυσική, Τεχνολογία, Επιστήμη του Μηχανικού, Μαθηματικά και Γλώσσα), η οποία προτείνεται από το πρόγραμμα φυσικής Λυκείου και αποτελεί στόχο των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών διεθνώς (ΦΕΚ 8570/Δ2).

Τέλος, οι συγγραφείς υποθέτουν ότι είναι η δυνατή η απολεσματικότερη μάθηση της αλγεβρικής αναπαράστασης μέσω της εφαρμογής της σε απλούς κώδικες που μπορούν να αναπτύσσουν οι μαθητές ή μέσω της κατανόησης της λειτουργίας της σε πολυπλοκότερους κώδικες. Η διερεύνηση αυτής της υπόθεσης θα αποτελέσει αντικείμενο άλλης εργασίας.

### Αναφορές

Ainsworth, S. (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In *Visualization: Theory and practice in science education* (pp. 191-208). Springer Netherlands.

- Barb, C., Quinn, A. L. (1997). Problem solving does not have to be a problem. *Mathematics Teacher* 90 (7), 536-541.
- Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of Physics*, 62(8), 750-762.
- Berg, C. A., & Smith, P. (1994). Assessing students' abilities to construct and interpret line graphs: disparities between multiple-choice and free-response instruments. *Science Education*, 78(6), 527-554.
- Buffler, A., Pillay, S., Lubben, F., & Fearick, R. (2008). A model-based view of physics for computational activities in the introductory physics course. *American Journal of Physics*, 76(4), 431-437.
- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 369-375). Utrecht, the Netherlands: Utrecht University.
- Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 41(1-2), 199-211.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Etkina, E., & Van Heuvelen, A. (2007). Investigative science learning environment—A science process approach to learning physics. *Research-based reform of university physics*, 1.
- Finkelstein, N. D., Adams, W. K., Keller, C. J., Kohl, P. B., Perkins, K. K., Podolefsky, N. S., & LeMaster, R. (2005). When learning about the real world is better done virtually: A study of substituting computer simulations for laboratory equipment. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, 1(1), 010103.
- Harter, W. G. (1991). Nothing going nowhere fast: Computer graphics in physics courses. *Computers in Physics*, 5(5), 466-478.
- Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). The strength of the community: How GeoGebra can inspire technology integration in mathematics teaching. *MSOR Connections*, 9(2), 3-5.
- Gilbert, J. K., Reiner, M., & Nakhleh, M. B. (Eds.). (2007). *Visualization: Theory and Practice in Science Education: Theory and Practice in Science Education* (Vol. 3). Springer Science & Business Media.
- Gilbert, J. K. (2007). Visualization: An emergent field of practice and enquiry in science education. *Visualization: Theory and Practice in Science Education: Theory and Practice in Science Education*, 3, 1.
- Laws, P. W. (1991). The role of computers in introductory physics courses. *Computers in Physics*, 5(5), 552-552.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & Van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics *American Journal of Physics*, 55(6), 503-513.
- Mc Dermott, L.C. (1993). Guest Comment: How we reach and how students learn – A mismatch *American Journal of Physics*. 61(4), 295-298, (1993)
- Osborne, J., & Hennessy, S. (2003). Literature review in science education and the role of ICT: Promise, problems and future directions.
- Meltzer, D. E. (2005). Relation between students' problem-solving performance and representational format. *American Journal of Physics*, 73(5), 463-478.
- Rapp, D. N. (2005). Mental models: Theoretical issues for visualizations in science education. In *Visualization in science education* (pp. 43-60). Springer Netherlands.
- Polizois, G., Valanides, N. (2010). Visualizing the Solutions of Chemical Problems Relating to Solubility, 42nd Annual Conference of the International Visual Literacy Association: *Visual Literacy in the 21st Century: Trends, Demands and Capacities*, Cyprus, September 29th to October 3rd, 2010