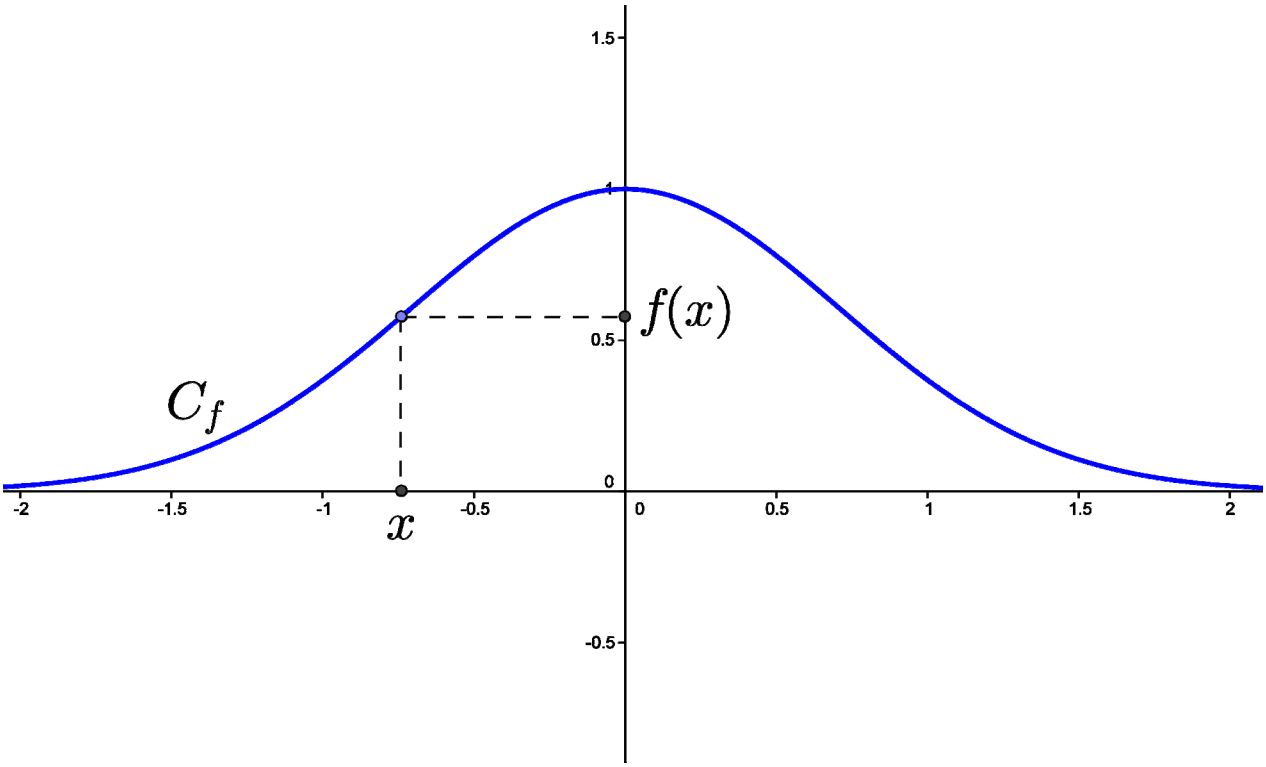
II. Συναρτήσεις



ΜΕΡΟΣ 1
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. Βασικές Έννοιες

Ορισμός: Έστω ***A*** ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το *A*** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$**,** αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα πραγματικό αριθμό y. Το ***y*** ονομάζεται **τιμή της *f* στο** x και συμβολίζεται με ***f(x)***.

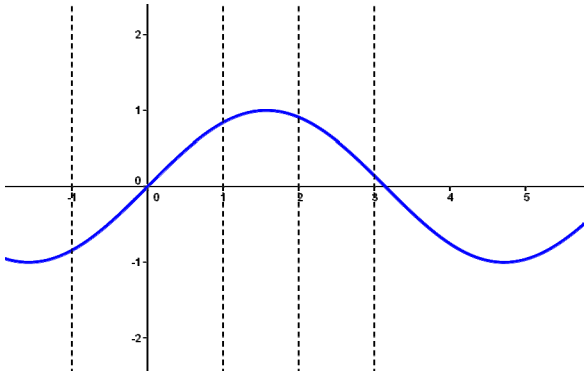
Συνήθως γράφουμε $f : A \to \mathbb{R}$ και στη συνέχεια δίνουμε τον τύπο της συνάρτησης, π.χ. $f(x) = \ln(x)$.

Πεδίο Ορισμού μιας συνάρτησης: Είναι το σύνολο *A*, δηλαδή το σύνολο των αριθμών που απεικονίζει η συνάρτηση.
Σύνολο Τιμών μιας συνάρτησης: Είναι το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in A$ και συμβολίζεται με ***f(A).*** Είναι δηλαδή:

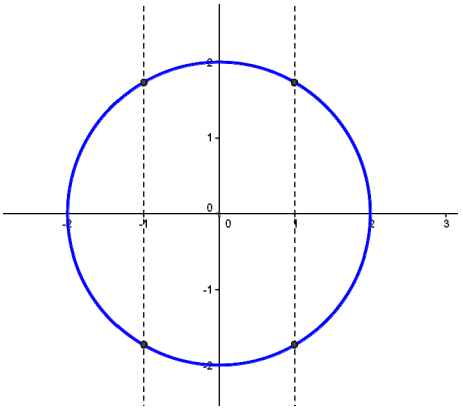
$$f(A) = \{y \mid y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης: Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ***A*** και ***Oxy*** ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων ***M(x,y)*** για τα οποία ισχύει ***y = f(x),*** δηλαδή το σύνολο των σημείων *M*(*x*,*f*(*x*)), λέγεται **γραφική παράσταση** της *f* και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση y=f(x) επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f**.** Επομένως, η ***y***=*f*(*x*) είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f*.

Προσοχή: Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ ένα κοινό σημείο (σχήμα 1).



(α)

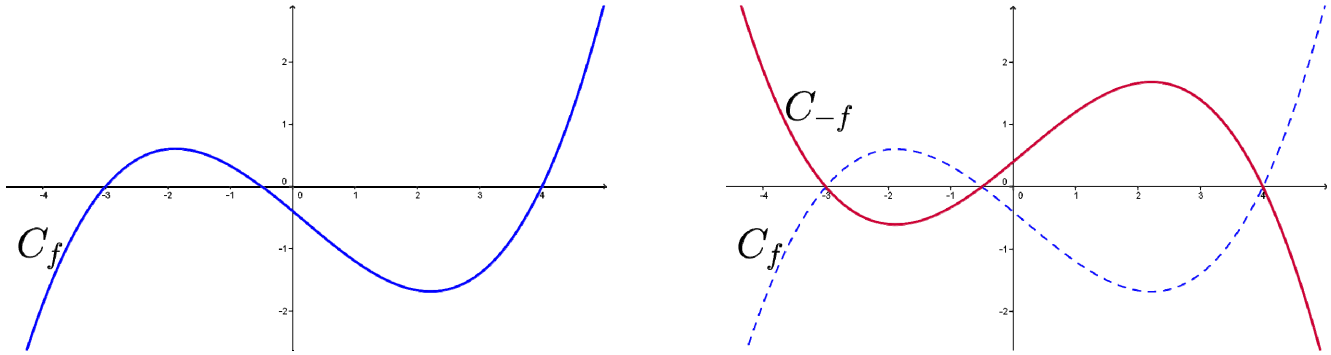


(β)

Σχήμα 1. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(x)$. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με την καμπύλη. Αντίθετα, ο κύκλος του σχήματος (β) δεν μπορεί να θεωρηθεί ως η γραφική συνάρτηση κάποιας συνάρτησης.

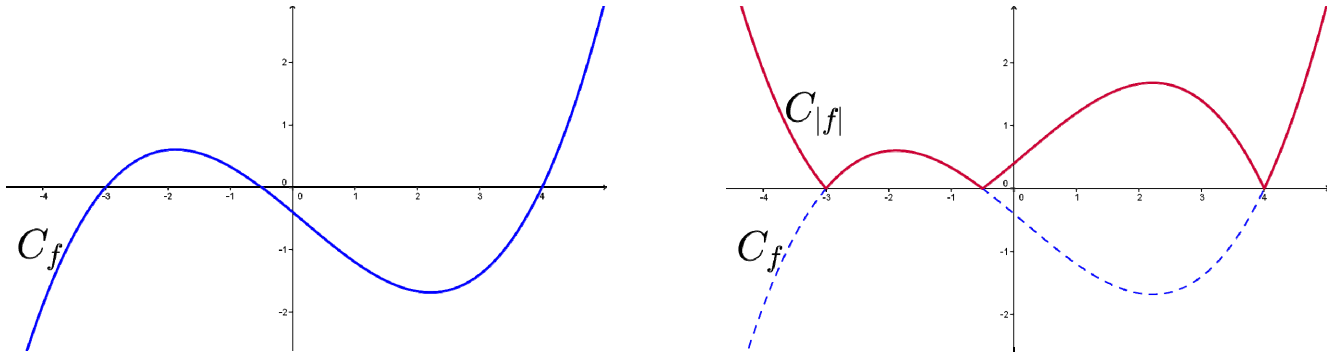
Κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *-f*.
Η γραφική παράστασης της συνάρτησης *-f* είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα ***x'x,*** της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία ***M'(x,-f(x))*** που είναι συμμετρικά των ***M(x,f(x)),*** ως προς τον άξονα ***x'x.*** (σχήμα 2).

Κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης |*f*|.
Η γραφική παράσταση της |*f*| αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα ***x'x*** και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα ***x'x,*** των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν (σχήμα 3).



(α) (β)

Σχήμα 2. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Στο (β) φαίνεται η γραφική παράσταση της *f* και της *-f*.



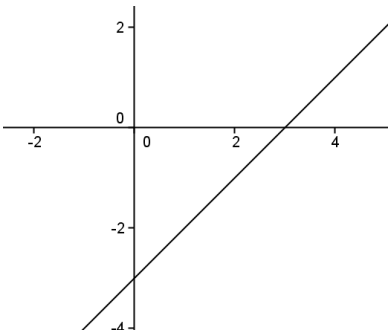
(α) (β)

Σχήμα 3. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Στο (β) φαίνεται η γραφική παράσταση της *f* και της |*f*|.

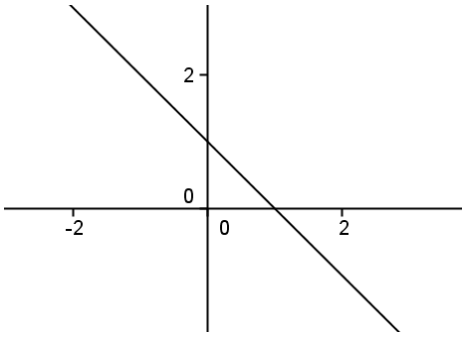
Β. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Γραμμική $f(x) = \alpha x + \beta$

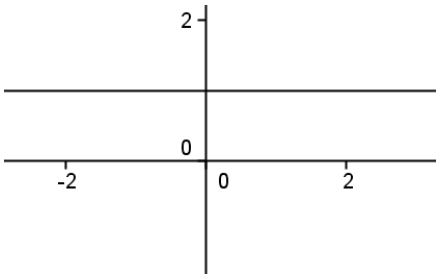
$\alpha > 0$



$\alpha < 0$



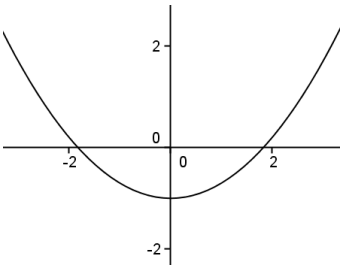
$\alpha = 0$ (σταθερή)



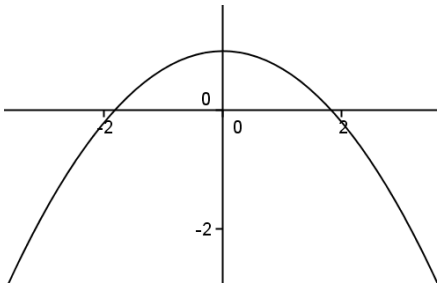
---

2) Παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$\alpha > 0$



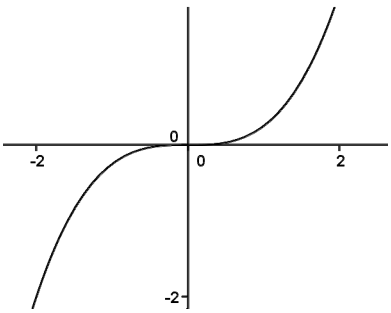
$\alpha < 0$



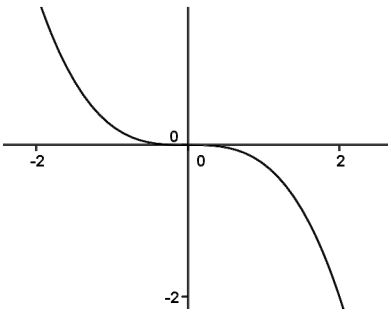
---

3) Η πολυωνυμική 3ου βαθμού

$\alpha > 0$



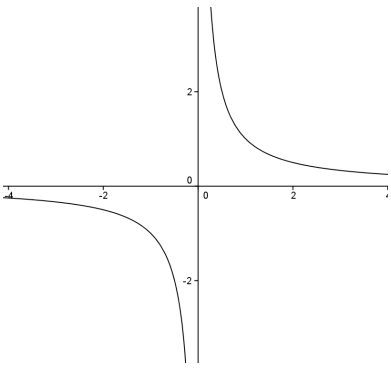
$\alpha < 0$



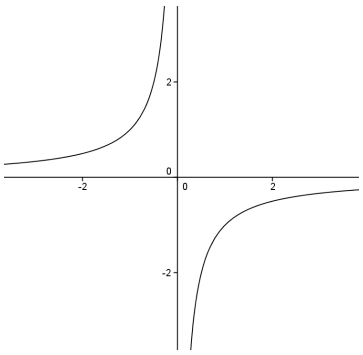
---

4) Υπερβολή $f(x) = \dfrac{a}{x}$

$\alpha > 0$

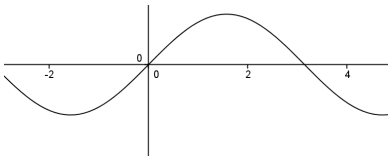


$\alpha < 0$

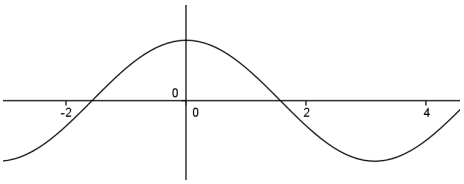


5) Ημίτονο – Συνημίτονο – Εφαπτομένη

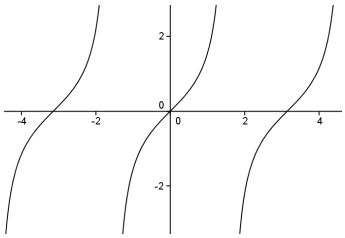
$f(x) = \eta\mu(x)$



$f(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$

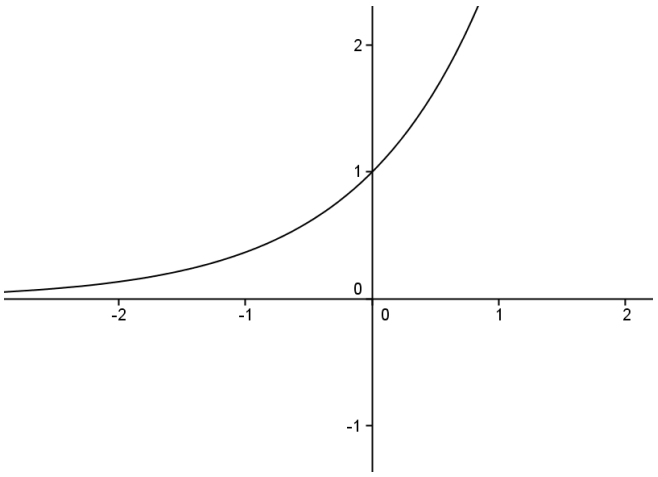


$f(x) = \varepsilon\phi(x)$

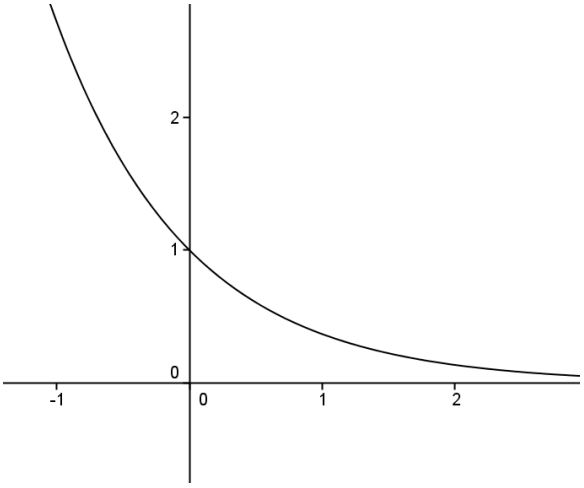


6) Εκθετική Συνάρτηση

$f(x) = e^{x}$

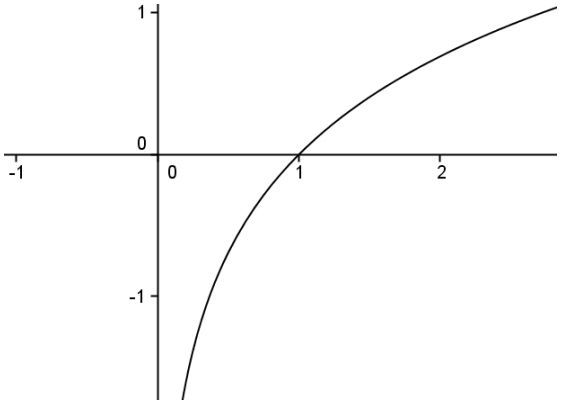


$f(x) = e^{-x}$

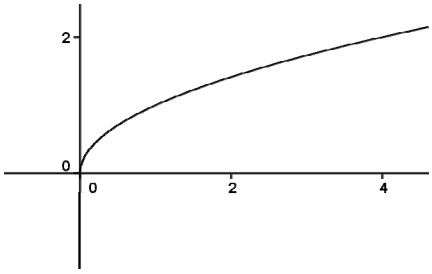


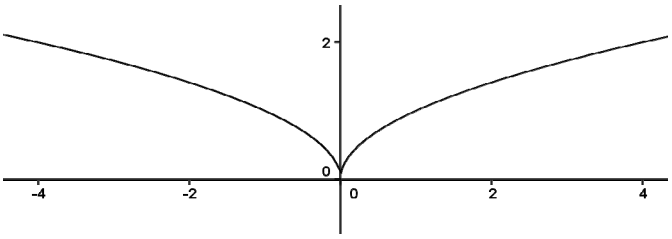
7) Λογαριθμική Συνάρτηση

$f(x) = \log(x)$



8) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{|x|}$.





Γ. Ισότητα - Πράξεις

Ισότητα Συναρτήσεων. Δύο συναρτήσεις *f* και *g* λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ***A*** και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Αν η σχέση $f(x) = g(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Gamma \subset A$**,** τότε θα λέμε ότι οι *f* και *g* είναι ίσες στο *Γ*.

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

Δίνονται οι συναρτήσεις *f* και *g* με πεδία ορισμού *A* και *B* αντίστοιχα.

- Άθροισμα: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- Διαφορά: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,
- Γινόμενο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- Πηλίκο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ είναι το $A \cap B$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πηλίκο *f/g* είναι το $A \cap B$ εξαιρουμένων των *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή (δηλαδή την *g*).

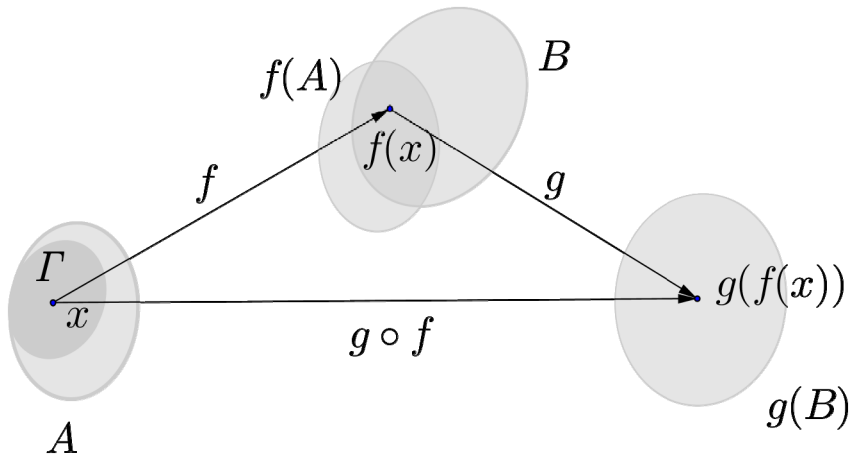
Σύνθεση Συναρτήσεων.

Αν *f, g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A, B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g*,** και τη συμβολίζουμε με *gof*, τη συνάρτηση με τύπο

$$\boxed{g \circ f(x) = g(f(x))}.$$

Το πεδίο ορισμού της *gof* αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της *f* για τα οποία το *f(x)* ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g* (σχήμα 4). Δηλαδή είναι το σύνολο

$$\Gamma = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$



Σχήμα 4. Σύνθεση συναρτήσεων.

Δ. Μεθοδολογία Ασκήσεων.

1. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης.

Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε κατάλληλους περιορισμούς, ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης. Ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

1) Κάθε παράσταση που βρίσκεται μέσα σε ρίζα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0.
2) Κάθε παρονομαστής πρέπει να είναι διάφορος του 0.
3) Κάθε παράσταση που βρίσκεται μέσα σε λογάριθμο πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0.

Συναληθεύοντας όλους τους περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της δοσμένης συνάρτησης. Επιπλέον, αν η ποσότητα x εκφράζει κάποιο φυσικό μέγεθος, πρέπει να το λάβουμε υπ' όψιν για τον υπολογισμό του πεδίου ορισμού. Για παράδειγμα, αν το x εκφράζει ύψος πρέπει να είναι θετικός αριθμός.

Παραδείγματα: Άσκηση 1Α σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

2. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να εκτελέσουμε κάποια πράξη μεταξύ δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού της νέας συνάρτησης. Για το σκοπό αυτό, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού όλων των δοσμένων συναρτήσεων και στη συνέχεια παίρνουμε μόνο τα κοινά τους στοιχεία. Στην περίπτωση που έχουμε διαίρεση δεν πρέπει να ξεχάσουμε τον περιορισμό $g(x) \neq 0$ (για τον παρονομαστή). Στη συνέχεια ο τύπος της νέας συνάρτησης βρίσκεται με απλές πράξεις.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 8Α, 9Α σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

3. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να βρούμε τη σύνθεση δύο συναρτήσεων

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε το πεδίο ορισμού της νέας συνάρτησης. Για το σκοπό αυτό, βρίσκουμε τα πεδία ορισμού A και B, της f και της g αντίστοιχα. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g, δηλαδή $f(x) \in B$. Τα σημεία που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη ($x \in A$ και $f(x) \in B$) σχηματίζουν το πεδίο ορισμού της $g \circ f$. Ο τύπος της $g \circ f$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big),$$

με απλές πράξεις.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 10Α, 11Α σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

4. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να βρούμε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση ικανοποιεί μια σχέση.

Αν μας ζητάνε η συνάρτηση να παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, έστω y_0 τότε λύνουμε την εξίσωση $f(x) = y_0$.

Αν μας ζητάνε να βρούμε πότε οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται πάνω από κάποιον αριθμό y_0 (ή ισοδύναμα πότε η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = y_0$) τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > y_0$. Παρόμοια δουλεύουμε αν μας λένε ότι οι τιμές της συνάρτησης βρίσκονται κάτω από τον y_0 ($f(x) < y_0$)

Αν θέλουμε να βρούμε πότε δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

Αν θέλουμε η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται πάνω (κάτω) από την γραφική παράσταση της g, τότε λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$).

Παραδείγματα: Ασκήσεις 2Α, 3Α σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

5. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε να εξετάσουμε αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες ή να βρούμε υπό ποιές προϋποθέσεις είναι ίσες.

Εφαρμόζουμε τον ορισμό. Για να είναι ίσες δύο συναρτήσεις αρκεί να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$. Αν οι δύο συναρτήσεις δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού τότε πρέπει να προσδιορίσουμε το μέγιστο υποσύνολο του $A \cap B$ για το οποίο ισχύει η σχέση $f(x) = g(x)$.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 7Α, 7Β, 8Β σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

6. Ασκήσεις οι οποίες μας ζητάνε σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (ή το αντίστροφο, δηλαδή να βρούμε τη συνάρτηση αν δίνεται η γραφική της παράσταση).

Συνδυάζουμε τις γνώσεις των βασικών συναρτήσεων, με τις ιδιότητες της συμμετρίας και την κατασκευή της $-f$ και $|f|$ όπου αυτό χρειάζεται. Για τις πολύκλαδες συναρτήσεις (δίκλαδες, τρίκλαδες) σχεδιάζουμε κάθε κλάδο ξεχωριστά παίρνοντας μόνο το κομμάτι της αντίστοιχης συνάρτησης που αντιστοιχεί στο πεδίο ορισμού του κλάδου.

Παραδείγματα: Ασκήσεις 6Α, 1Β, 5Β σχολικού βιβλίου σελ. 145-148.

Ασκήσεις

1. Δίνεται συνάρτηση $f:(-1,\ 1)\to R$ με τύπο $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $f(\alpha)+f(\beta)=f\left(\frac{a+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$ για κάθε $\alpha\beta\in(-1,\ 1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R:f(x)=x^2$. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=2$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R:f(x)=\frac{1}{8}\left(a^x+a^{-x}\right)$ με $a\rhd 0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $f(\gamma+\delta)+f(\gamma-\delta)=8f(\gamma)\cdot f(\delta)$, για κάθε $\gamma,\delta\in R$.

4. Δίνεται η σχέση: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$, η οποία ισχύει για κάθε $x\in R-\{2,\ -1\}$. Να βρείτε τη συνάρτηση που ορίζεται από αυτή.

5. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό $x\in R^*$ ισχύει η σχέση: $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, να βρείτε τη συνάρτηση την οποία ορίζει αυτή.

6. Δίνετε η συνάρτηση $g:R\to R$ με γνωστό τύπο. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$, όταν για κάθε $x\in R$ ισχύει η σχέση: $3f(-x)+4g(x)=f(x-2)$.

7. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει η σχέση: $f(3x+1)=9x^2+3x$. Να βρείτε τη συνάρτηση, η οποία ορίζεται από αυτήν και να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει η σχέση: $f(2x)-4f(x)=2x$.

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{x\ -5x+6}$.

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\log\left(x^2-3x\right)$.

11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}$.

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,\ g$ με τύπο: $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{1-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x)=\sqrt{x-2}$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f\cdot g$.

16. Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές των $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ώστε οι συναρτήσεις: $f:[\alpha,\beta]\to R$ με τύπο $f(x)=\gamma x+1$ και $g:[0,1]\to R$ με τύπο $g(x)=x+\delta$, να είναι ίσες.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\in(-\infty, 0] \\ 2x, & x\in(0, +\infty) \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\infty, 2] \\ x+1, & x\in(2, +\infty) \end{cases}$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$

18. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ και $g(x)=x+3$, να εξετάσετε αν είναι ίσες.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x)=\dfrac{2\mu^2x+\mu}{x+1-\mu}$ και $g(x)=\dfrac{(3\mu-1)x+\mu}{x+\mu}$. Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του μ ώστε $f=g$.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο όπως πιο κάτω. Να βρείτε τα σύνολα, στα οποία ισχύει η ισότητα $f=g$.

i) $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x^3-1}$ και $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$.

ii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ και $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

iii) $f(x)=\log\left(-x^2-6x+7\right)^4$ και $g(x)=4\log\left(7-6x-x^2\right)$.

iv) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$.

ΜΕΡΟΣ 2
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

Α. Βασικές Έννοιες

Γνησίως Αύξουσα: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Αύξουσα: Μια συνάρτηση καλείται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \le f(x_2)$.

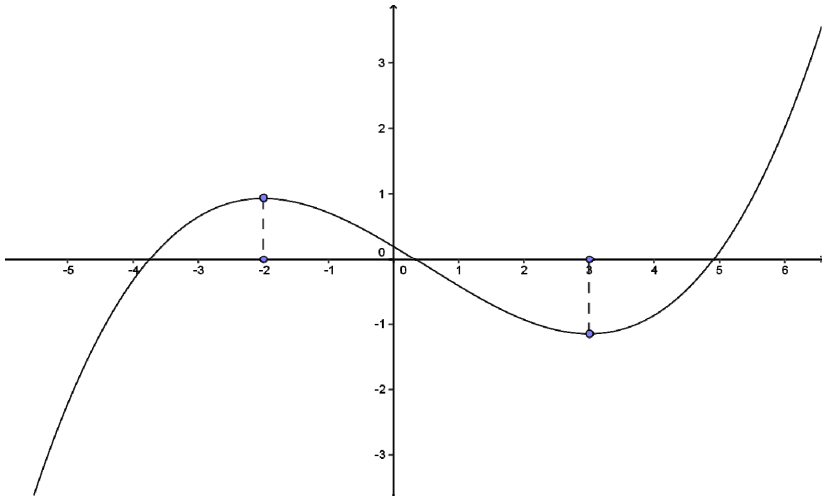
Γνησίως Φθίνουσα: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Φθίνουσα: Μια συνάρτηση καλείται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \ge f(x_2)$.

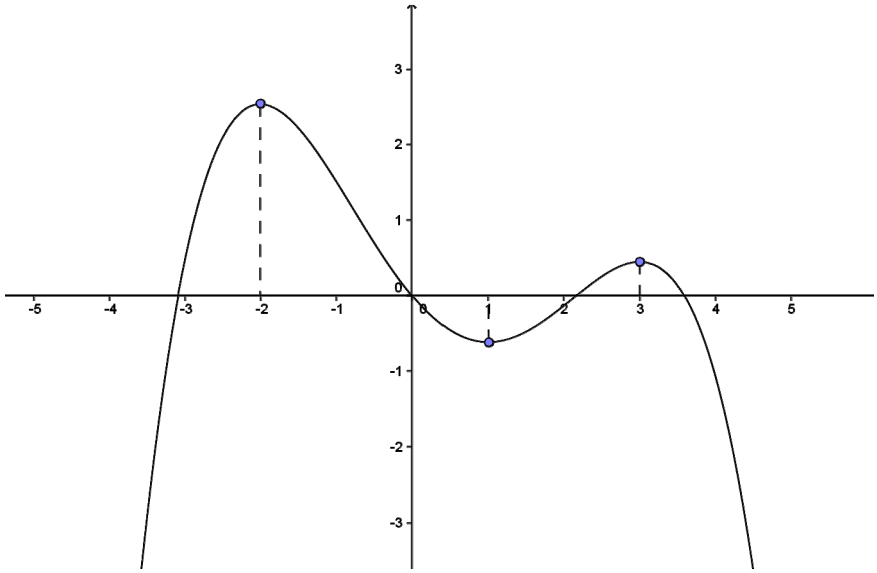
Γνησίως Μονότονη: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ολικό Μέγιστο: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Ολικό Ελάχιστο: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.



Σχήμα 5. Η συνάρτηση του σχήματος είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$. Η συνάρτηση δεν έχει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο. Παρουσιάζει, όμως, τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -2$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 3$.



Σχήμα 6. Η συνάρτηση του σχήματος είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x=-2$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x=1$ και τοπικό μέγιστο για $x=3$.

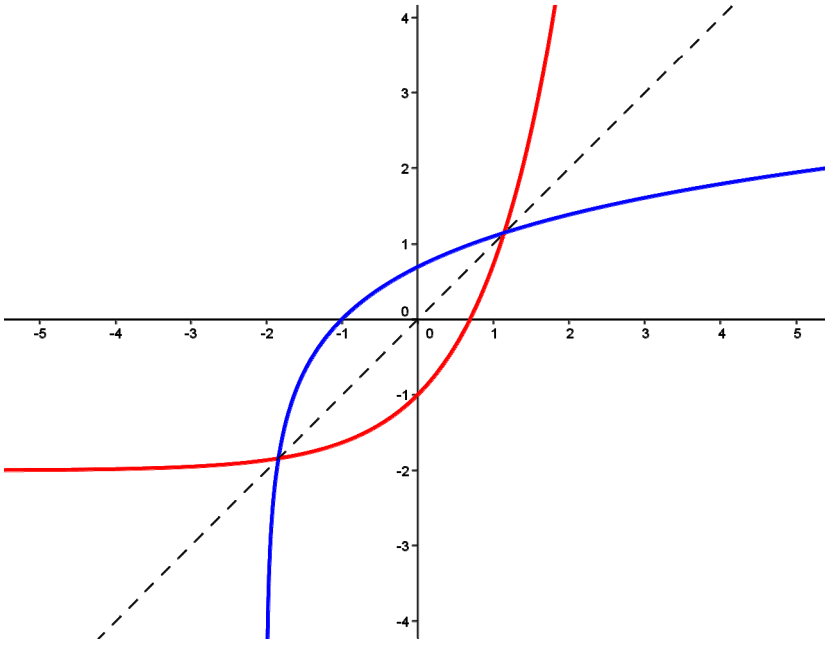
Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο καλούνται ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Συνάρτηση 1-1: Μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, καλείται συνάρτηση 1-1, όταν για κάθε $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ ισχύει η συνεπαγωγή $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα ισχύει η συνεπαγωγή $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

- Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις 1-1 που δεν είναι γνήσια μονότονες.

Αντίστροφη Συνάρτηση: Δίνεται η συνάρτηση 1-1, $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$. Ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ως εξής. $f^{-1}:f(A)\to\mathbb{R}$: $f^{-1}(y)=x$, για κάθε $y\in f(A)$, με $y=f(x)$, για κάποιο $x\in A$.
Προσοχή:

- Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f.
- Η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f.
- Ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(x)=y$.
- Για κάθε $x\in A$ ισχύει $f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$.
- Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ (τη διχοτόμο του 1^{ου} και του 3^{ου} τεταρτημορίου).



Σχήμα 7. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Άρτια Συνάρτηση: Μια συνάρτηση f θα λέγεται άρτια αν και μόνο αν:
Α) Το πεδίο ορισμού της D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0 και
Β) Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Περιττή Συνάρτηση: Μια συνάρτηση f θα λέγεται περιττή αν και μόνο αν:
Α) Το πεδίο ορισμού της D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0 και
Β) Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

Α) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 1$ Β) $f(x) = \eta\mu(x^2)$

Γ) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ Δ) $f(x) = 2x^3 - x$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{1+2x}{1-2x}$ είναι περιττή.

3. Να εξεταστεί αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι 1-1.

Α) $f(x) = 2x^3 + 5$ Β) $f(x) = x^2 - 2$ Γ) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x-1}$ Δ) $f(x) = e^x - 2$

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \in (-\infty,3] \\ x^2 - 4 & x \in (3,+\infty) \end{cases}$ δεν είναι 1-1.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Εξετάστε αν είναι 1-1. Αν απαντήσετε καταφατικά βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - \ln(x-1)$. Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται και υπολογίστε την αντίστροφή της.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται και υπολογίστε την αντίστροφή της.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2x + 3$. Υπολογίστε το α ώστε η συνάρτηση να είναι 1-1.

9. Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις.

Α) $f(x) = \sqrt{x-1}$ Β) $f(x) = 2\ln(x) + 5$

Γ) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ Δ) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x}-1}$

10. Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

11. Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \left|e^x - 1\right|$.

12. Εξετάστε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln^2\left(1-\sqrt{x}\right)$.

13. Εξετάστε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ x - a & x \geq 0 \end{cases}$$

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη;

Θεωρητικές Ασκήσεις

14. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)+x^2=-1$, για κάθε $x \in R$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-a, a)$.
Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=a\big(f(x)+f(-x)\big)$ είναι άρτια, για κάθε $a \in R^*$.
Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\beta\big(f(x)-f(-x)\big)$ είναι περιττή συνάρτηση για κάθε $\beta \in R^*$.

16. Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-a, a)$, $a \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο συναρτήσεων, μιας άρτιας και μιας περιττής.

17. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το $(-a, a)$, $a \neq 0$, η οποία να είναι άρτια.

18. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

19. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.

20. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση.

21. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες
Α) Το γινόμενο δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.
Β) Το γινόμενο δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.
Γ) Το γινόμενο μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση.

22. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-a, a)$, $a \neq 0$ είναι γνησίως μονότονη τότε σίγουρα δεν είναι άρτια.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \to R$, και $g: B \to R$, τέτοιες ώστε να ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$.
Να αποδείξετε ότι:
Α) Αν οι f, g είναι γνήσια μονότονες τότε και η $f \circ g$ είναι γνήσια μονότονη.
Β) Αν οι f, g είναι γνήσια μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
Γ) Αν οι f, g είναι γνήσια μονότονες με το διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα.

24. Αποδείξτε ότι
Α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα με $f(x)>0$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, τότε η συνάρτηση $1/f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

25. Αποδείξτε ότι
Α) Αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες τότε και η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα.
Β) Αν οι f, g είναι γνησίως αύξουσες τότε και η fg είναι γνησίως αύξουσα.
Γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η συνάρτηση $F(x)=a+f(x)$, όπου $a \in R$, είναι γνησίως αύξουσα.
Δ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η συνάρτηση $F(x)=af(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, αν $a>0$, ή γνησίως φθίνουσα αν $a<0$.

26. Αποδείξτε ότι:

Α) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Β) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, f^{-1} βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

27. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση είναι περιττή και 1-1 τότε και η f^{-1} είναι περιττή.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x - e$.

Α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\ln(x^2) - 1\right) = f\left(\ln(x) + 1\right)$.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\ln(x) - 1\right) = f^{-1}\left(\ln(x) - 1\right)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f \circ f(x) = xf(x)$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Β) Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

30. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση για την οποία να ισχύει $f(x) < 0$ και $f^2(x) - 5f(x) + 6 > 0$ για κάθε $x \in R$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R^*$ για την οποία ισχύει ότι $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Α) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$.

Β) Να δείξετε ότι $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in R$.

Γ) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Δ) Αν η f είναι 1-1 να αποδείξετε ότι $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.